TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1029_II**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

II

MSS·C·GIOR
RICC·DISS
EDITE
T·II·

1029

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1029 II

Dissertazioni edite del Signor
Conte Giordano Riccati
disposte secondo l'ordine della
loro pubblicazione

Tomo II

Indice delle Opere contenute in questo Volume

1. Della Figura, e dello Sfiancamento degli archi. pag. 1.
2. Esame del sistema musico di Monsieur Rameau. pag. 45.
3. Del Suono falso. pag. 80.
4. Annotazione sopra la trisezione degli angoli. pag. 162.
5. Esame del sistema musico del Signor Giuseppe Tartini. pag. 168.
6. Riflessioni sopra il primo Libro del P. Valotti. pag. 207.
7. Del moto d'un corpo discendente lungo un lato retto d'un triangolo materiale. pag. 257.
8. Della riduzione Cardanica delle equazioni di terzo grado. pag. 374.
9. Lettera al Signor Abate Giuseppe Contarelli. pag. 387.
10. Lettera al P. D. Francesco M. Franceschinis. pag. 396.
11. Del centro d'oscillazione I. pag. 402.
12. Del centro d'oscillazione II. pag. 441.
13. Della figura del Sorgo. pag. 472.
14. Lettera I. al P. D. Giovenale Sacchi. pag. 494.
15. Lettera II. al P. D. Giovenale Sacchi. pag. 504.
16. Determinare il massimo allungamento &c. pag. 523.
17. Della forza viva d'alcuni corpi, che ruzzolano &c. pag. 537.
18. Il nulla immaginario non può confondersi col reale. pag. 551.

Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia
Tomo XX pag. 149.

Della Figura, e dello Sfiancamento degli Archi
Dissertazione Fisico matematica del Signor
Co. Giordano Riccati.

paso,

Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia
Tomo XX. pag. 149.

Della Figura, e dello Spiancamento degli Archi. Dissertazione Fisico-Matematica del Sig. Co. Giordano Riccati.

Conciossiachè gli archi tornano in molta utilità dell'Architettura civile, e militare, formandosi col mezzo loro delle grandi aperture negli edifizj, senza che ne nasca veruno pregiudizio, purchè siano ben costrutti, e ad esse si oppongano pile valevoli a sostenerne lo spiancamento; giudico opportuna cosa il trattare della loro più confacente figura, della loro forza spiancante, e della larghezza delle pile atta a resistere alla detta forza.

Per due motivi può un arco far moto, o perchè i suoi elementi non siano equilibrati, di modo che tentino continuamente di cangiar posizione, e di alterare la figura dell'arco; o perchè le pile non siano fornite della conveniente larghezza per superare lo spiancamento. Cominciando dalle cose più semplici, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

Problema I.

Determinare la curva uniformemente pesante, i cui elementi siano vicendevolmente equilibrati.

Sia A (Fig. 1.) la sommità, o il massimo della curva, che si cerca ACH. Faccio AD = y, DC = x, AC = s, CF = dy, FG = dx, CG = ds, ed osservo ch'essendo la curva uniformemente pesante, sarà il peso della porzione AC ad essa proporzionale, e si potrà esprimere per AC = s. Ai punti A, C conduco le due tangenti, AD che coincide colla linea orizzontale delle assisse, perchè in A si suppone il massimo, e CL, le quali si taglino nel punto I, per cui delineo la verticale IK = s indicante il peso dell'arco AC. Il peso KI preme per le direzioni IA, IC i punti A, C, le contrarie pressioni dei quali deggiono essere uguali a quelle cagionate dal nominato

peso,

peso, se si ha da conservar l'equilibrio. Acciocchè questo si mantenga, egli è d'uopo, che la pressione del punto A, il peso KI, e la pressione del punto C si corrispondano nella ragione dei seni degli angoli opposti KIC, o sia KIL compimento ai due retti; AIC, o sia DIC compimento ai due retti; KIA; ma KIL = FGC, DIC = FCG, KIA = CFG, ed i seni degli angoli G, C, F stanno come i lati opposti CF = dy, FG = dx, CG = ds; dunque la pressione del punto A al peso KI = s si riferisce nella proporzione di $ds : dx$. Stando in equilibrio tutti gli elementi dello arco ACH, la pressione del punto A non può cangiarsi o si appoggi ad una pila immobile il punto H, o qualunque altro punto dell' arco; dunque essa pressione è costante, ed io la pongo $= a$. Quindi per la cosa detta avremo $a : s :: dy : dx$, e conseguentemente $\frac{a\,dx}{s} = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$, o sia $\frac{a^2dx^2}{s^2} = ds^2 - dx^2$, e adempiute le necessarie operazioni, $dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{(a^2+s^2)}}$. Passo all'integrazione, e mi si presenta $a + x = \sqrt{(a^2+s^2)}$. Si è resa necessaria l'aggiunta della costante a, la quale si determina ponendo, come segue nel punto A, x, ed $s = 0$. L'ultima formola ci suggerisce il valore di $s = \sqrt{(2ax+x^2)}$, il quale sostituito nella prima ci dà

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} = dy,$$

equazione della curva cercata, ch'è quella stessa, che forma una catena pendente da due sostegni, la quale si suol nominar catenaria.

Questa formola si va integrazione col mezzo dei logaritmi, essendo $y = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$ nella logaritmica della suttangente a, nè abbisogna di aggiunta di costante, quando si supponga $la = 0$.

Costruzione.

Descritta l'iperbola equilatera GDF (fig. 2.), i cui assintoti AH, BE, e l'asse AC, nella quale sia AD = a, DC = x, scopriremo la linea EC più l'applicata CF, o sia EF = $a + x + \sqrt{(2ax+x^2)}$. Alla logaritmica AE (fig. 3) della suttangente a si adatti l'ordinata DE = $a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}$ eguale alla linea FE della fig. 2., e presa per protonumero l'ordinata AB = a, sarà AD = $l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}) = y$. Se dunque nella fig. 1 si taglierà AD eguale alla AD della fig. 3.,

e DC uguale a DC della fig. 2., i punti C in tal maniera determinati apparterranno alla curva ACH, che di descrivere ci siamo proposti.

Scolio I.

Posta x infinitesima, abbiamo $y = l(a+\sqrt{(2ax)}) = \sqrt{(2ax)}$: ma questa è l'equazione al circolo del raggio = a nella ipotesi di x minima; dunque a è uguale al raggio del circolo osculante la curva ACH (fig. 1.) nel vertice A.

Scolio II.

Per delineare la curva ACH (fig. 2.), in cui ad un dato valore di DC = x corrisponda un valore parimente dato di AD = y conforme richiedono le circostanze, si descriva col mezzo della premessa costruzione la curva Ach dall'equazione $v = l(b+z+\sqrt{(2bz+z^2)})$, e fatte AD, DC uguali ai due valori dati di y, e di x, si tiri la diagonale AC, che si continui sino a tanto che tagli in c la curva Ach. Conducasi poscia la linea cd parallela a CD, e segnata df = b, si meni l'ipotenusa Af, che intersecherà la CD nel punto F: dico che determinata a = DF, la curva dell'equazione $y = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$ passerà per il punto C.

Giacchè per la costruzione DF = a : df = b :: DC = x : dc = z, ne segue essere $a+x+\sqrt{(2ax+x^2)} : b+z+\sqrt{(2bz+z^2)} :: a : b$: ma in due logaritmiche, in cui i numeri $a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}$, $b+z+\sqrt{(2bz+z^2)}$ stanno come i protonumeri a, b, i quali sono ancor suttangenti, i logaritmi di essi numeri accettano la ragione delle suttangenti, o sia nel nostro caso di DC : dc; dunque dc : DC :: Ad : AD, e per conseguenza la curva AH passa per il punto C.

Scolio III.

Più confacente alla pratica sarà il delineare la nostra curva meccanicamente. Sia (fig. 3.) l'orizzontale EH la larghezza dell'arco, e la verticale FA la sua saetta, che si continui sino in 2A, di modo che sia F2A = FA. Penda dal chiodo E una catena composta di anelli eguali, la quale si faccia scorrere lungo il chiodo H finchè passi per il punto 2A. Segnata sopra una tavola la curva E2D2A2CH, si capovolti in EDACH, e sarà questa la figura cercata dell'arco, avendo avvertito di sopra esser essa

una

una cosa stessa colla catenaria.

Scolio IV.

Abbiamo veduto, che la forza sostenuta dal punto C (Fig. 1.) per la direzione CG è proporzionale a CG, e quindi egli soffre uno sfiancamento proporzionale a CF: ma anche la forza, che patisce il punto A, è proporzionale a CF, e di più = a; dunque lo sfiancamento sofferto da qualunque punto C sarà = a. La pressione verticale sostenuta dallo stesso punto è proporzionale ad FG: e poichè alla medesima FG è proporzionale il peso KI, ed in altro $= s = \sqrt{(2ax+x^2)}$; si troverà tale altresì il valore della pressione verticale del punto C.

Scolio V.

L'ipotesi d'una curva pesante è matematica, e non fisica, richiedendo la durevolezza di un arco, che sia fornito di una conveniente grossezza. Ora data la scoperta curva ACH (Fig. 8.), cerchiamo qual altra curva ach abbia da formare il pavimento superiore dell'arco, acciocchè il peso cCGg portato dall'elemento $CG = ds$ sia sempre ad esso proporzionale. Nominata $Cc = z$, avremo $CcgG = z\,dy$: ma questo peso dev'essere proporzionale a $CG = ds$; dunque $z\,dy = b\,ds$; e conciossiachè $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, $ds = \frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, ci si presenterà $z = \frac{b\,(a+x)}{a} = b + \frac{bx}{a}$. Se dunque faremo $Cc = b + \frac{bx}{a}$, il punto c, ed altri similmente determinati apparterranno alla curva acb, di cui si va in traccia. Avvertasi che essendo rispettivamente al punto A $x = 0$, abbiamo $Aa = b$. È arbitraria pertanto la determinazione della costante b, e dipende dalla grossezza, che si assegna all'arco nella sua sommità. Posta $Aa = b = a$, ne risulta $Cc = b + x$, e sottratta $DC = x$, $Dc = Aa = b$, e perciò in questo incontro ach è una linea retta parallela ad AD. Negli altri casi la curva ach volterà verso A o il concavo, o il convesso, secondo che si stabilirà $Aa = b$ o minore, o maggiore di a. Non tralascio di notare, che le due forze assolute sfiancante, e premente sostenute dal punto C si agguagliano alle quantità ab, $bs = b\sqrt{(2ax+x^2)}$.

Problema II.

<u>Determinare la larghezza della pila, che faccia equilibrio collo sforzo di uno de' nostri archi.</u>

A lo

Allo sfiancamento dell'arco ABeC (Fig. 5.) si apponga la pila GI, il cui centro di gravità K. Ci mostra l'esperienza, che se [illegible] fa moto, la pila GI, che stante la tenacità del cemento si può considerare come di un pezzo solo; si gira intorno al punto ultimo esteriore H. Segue un tal effetto, quando la tenacità del cemento, e la fregagione avvalorata dal peso CI impediscono, che l'arco spinga fuori di luogo per la direzione orizzontale CR lo strato CI. Ciò Supposto fingasi, che succeda un infinitesimo movimento intorno il punto H, e che per conseguenza coi raggi HC, HK si descrivano gli archetti CE, KO proporzionali ai raggi suddetti. Conduco le orizzontali CF, KP, che nei punti F, P taglino le verticali EF, OP, e tiro parimente la verticale KN. Dagli angoli retti, e perciò eguali GCF, HCE sottratto il comune HCF, rimane GCH = FCE; dunque i triangoli rettangoli HCG, ECF sono simili, ed i lati HC, CG, GH proporzionali ai corrispondenti EC, CF, FE. Nella medesima guisa dimostrerò, che HK, KN, NH sono proporzionali ai lati relativi OK, KP, PO. E conciossiachè HC : CE :: HK : K[O] si conchiuderà essere CF : CG :: FE : GH nella stessa ragione di KP : KN, di PO : NH.

Sia come sopra $AB = b$, $Cc = b + \frac{bx}{a}$; e di più $GC = c$, GH onde si abbia $GC = c + b + \frac{bx}{a}$, $NK = c + b + \frac{bx}{a}$, $NH = \frac{q}{2}$.

Allora che succeda il minimo moto intorno il punto H, la forza sfiancante $= ab$ dal punto C agisce per lo spazio CF, e la forza verticale $b\sqrt{(2ax + x^2)}$ reagisce per lo spazio FE, ed il peso $(c + b + \frac{bx}{a})q$ della pila GI esercita reazione per [lo] spazio PO. La pila starà in equilibrio collo sforzo dell'arco, se si adempierà l'equazione $ab \cdot CF - b\sqrt{(2ax + x^2)} \cdot FE - (c + b + \frac{bx}{a})q \cdot PO$, ovvero sostituendo in cambio di CF, FE, P[O] le linee finite proporzionali $GC = c$, $GH = q$, $NH = \frac{1}{2}q$, $abc - b\sqrt{(2ax + x^2)} \cdot q = (c + b + \frac{bx}{a})\frac{q^2}{2}$, dalla qual formola ne risulta

$$q = \frac{\sqrt{(2a^2bc \cdot (ac + ab + bx) + [illegible](2ax + x^2)) - ab\sqrt{(2ax + x^2)}}}{ac + ab + bx}$$

Corollario I.

Se le grandezze a, b, c, x in due archi siano simili, la stessa proporzione si troverà anche fra la larghezza q della pila, nelle

quale

quale si corrisponderanno altresì le larghezze degli archi $= xy = f(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$, che essendo i numeri come i protonumeri, stanno in ragione della suttangenti $= a$.

Corollario II.

Posta l'altezza della pila $c = 0$, ci si presenterà $q = 0$. Noto, che nella soluzione del Problema si suppone, che sfianchi il solo punto C (Fig. 6.) della sezione Cc dell'arco, e che il fregamento, e la tenacità impedisca al detto punto C il muoversi orizzontalmente lungo la linea CH: passando dal matematico al fisico, ad un arco dee assegnarsi almeno quella spalla CH, che richiede la sua impostatura CI, la quale dee essere normale alla tangente CL della curva nel punto C. Anzi io consiglierei gli Architetti in què casi, ne' quali è b notabilmente minore di a, ad allargare la spalla sino in K punto di intersecazione della orizzontale CK, e della curva AIK, e di più a seguitare sotterra per qualche tratto le curve AC, BK, avendo sempre mira, che gli strati, per esempio CI, siano normali alle rispettive tangenti. Se lo strato in C si facesse orizzontale, potrebbe lo sfiancamento cacciare di luogo la picciola massa cCK, vincendo la fregagione, e la tenacità del cemento.

Corollario III.

Quando fosse $c = \frac{b.(a+x) + 2\sqrt{(ab.(2ax+x^2))}}{a}$, si troverebbe $q = \sqrt{(ab)}$. Si dimostra agevolmente questo Corollario ponendo nella formola generale $q = \sqrt{(ab)}$, e deducendone poscia il valore di c.

Mettendo per ultimo $c = \infty$, ci si presenta $q = \sqrt{(2ab)}$. Sia esempigrazia $a = 12$, $ab = 3$, e l'arco per quanto grandi siano i valori di c, di x, e di y, non richiederà mai la spalla $q = 6$. Questa spalla dunque resisterà certamente allo sfiancamento.

Scolio.

Agli stipiti delle porte, e delle finestre si sovrappongono degli archi retti, che qui si sogliono nominar Remenati. Non vi ha dubbio, che se il Remenato è perfettamente retto, di modo che $x = 0$, egli è necessario, che il raggio osculatore $= a$ del punto A della curva AC (Fig. 7.) sia infinito, e che per conseguenza ne risulti $q = \sqrt{\left(\frac{2abc}{c+b}\right)} = \infty$, purchè si prescinda dalle fregagioni, dalla tenacità del cemento, che si oppone allo sfiancamento del Remenato,

rendendolo

rendendolo come di un pezzo solo, e dalla sequenza nel sito GH col fondamento. Per altro nel costruirsi gli archi, di cui parliamo, hanno per costume gli Architetti di sollevare alquanto nel mezzo la tavola, che li sostiene, e quindi divenendo x uguale ad una grandezza finita, quantunque picciola, si determina a rispettivamente grande, ma dentro i limiti del finito, e la larghezza q della pila diviene anche assai finita.

Riuscirà profittevole rischiarare la cosa con un esempio. Sia $a = 124$, $c = 64$, $b = 6$, $x = 2$, e dopo non breve calcolo si troverà $q = 41 - \frac{671}{9224}$. In questa circostanza scopriremo $a + x + \sqrt{(2ax + x^2)} = 126 + 17 + \frac{1}{32}$, e ne dedurremo, che nella logistica della suttangente, e del protonumero $a = 126$, il $\log.(a + x + \sqrt{2ax + x^2}) = \log.(124 + 17 + \frac{1}{32}) = y$ si accosta molto al valore $17 = y$. Perciò una porta, o una finestra, in cui la larghezza $2y = 34$, l'altezza $c = 64$, l'altezza del remanente $b = 6$, e saetta alla metà della larghezza $= x = 2$, richiede la spalla $q = 41$, che sta alla larghezza di esso porta, o finestra prossimamente come $6 : 5$, prescindendo dalle frizzagioni, e dalla tenacità della calcina, le quali resistenze si oppongono all'azione della gravità, e per conseguenza anche a quella della potenza sbarcante.

Ci sono alcuni Muratori, che danno soverchia inclinazione alla prima pietra CI (fig. 4a) di un remenato. Debb'esser la stessa normale alla tangente CL condotta al punto C della curva AC, e riferendosi per la natura di essa curva $CD : DL :: a : s = \sqrt{(2ax + x^2)} :: 126 : 18\frac{1}{32}$, nella medesima ragione per la similitudine dei triangoli LDC, CHI hanno a corrispondersi le linee IH, HC, cioè a dire prossimamente come $6 : 1$, e tanto a non più discostarsi la linea CI dalla verticale. Ritenuti gli stessi dati, ed accrescendo l'inclinazione della linea CI, non riesce di ben chiudere il remenato, il quale in cambio di stringersi, e di rassodarsi, sempre più si scompone.

Problema III.

<u>Determinare la figura di un arco, i cui elementi siano mutuamente equilibrati, sopra del quale stia una muraglia, che ascendendo ad una data altezza termini in una linea orizzontale.</u>

Sia

Sia A (fig. 9.) la sommità dell'arco, ed ACH la figura cercata e sopra essa si intenda costrutta la muraglia $ACHNA$. Pongo $AB = b$, $AD = y$, $DC = b+x$, $CF = dy$, $FG = dx$; avremo l'elemento $DCGE$ del peso della muraglia ADB uguale a $(b+x) \cdot dy$, e conseguentemente il peso della mentovata muraglia $= \int (b+x) \cdot dy$. Conduco ai punti A, C le due tangenti, AM orizzontale, perchè l'ordinata AB è la minima, e CL, le quali si intersechino nel punto I, per cui menò la verticale $IK = \int (b+x) \cdot dy$, peso sovrapposto all'arco AC, e col discorso usato nel Problema I. provo, che la pressione costante del punto A, che pongo $= ab$, al peso $KI = \int (b+x) \cdot dy$ serba la proporzione di $dy : dx$; la pressione del punto C al peso $KI = \int (b+x) \cdot dy$ serba la ragione di $ds : dx$. Avremo dunque $ab : \int (b+x) dy :: dy : dx$, e per conseguenza $\frac{ab\, dx}{dy} = \int (b+x) \cdot dy$, e differenziando, presa dx costante $-\frac{ab\, dx\, ddy}{dy^2} = (b+x) \cdot dy$, ovvero $-ab\, dx\, ddy = (b+x) \cdot dy^3$.

A cagione di ridurre la nostra equazione alle prime differenze, metto $dy = z\, dx$, e prese le differenze, $ddy = dz\, dx$. Sostituiti in vece di dy, ddy i loro valori, troverò $-ab\, dx^2\, dz = (b+x) \cdot z^3 dx^3$, o pure $-\frac{ab\, dz}{z^3} = b\, dx + x\, dx$, e integrando, $\frac{ab}{z^2} = 2bx + x^2 + B^2$, e perciò $\frac{\sqrt{(ab)}}{z} = \sqrt{(2bx + x^2 + B^2)}$. Dalla fermata di sostituzione $dy = z\, dx$ si raccoglie essere $\frac{1}{z} = \frac{dx}{dy}$, e quindi $\sqrt{(ab)} \cdot \frac{dx}{dy} = \sqrt{(2bx + x^2 + B^2)}$.

Determineremo la costante aggiunta B^2, se osserveremo, che per la prima equazione $\sqrt{(ab)} \cdot \frac{dx}{dy} = \int \frac{(b+x) \cdot dy}{\sqrt{(ab)}}$; dunque $\int \frac{(b+x) \cdot dy}{\sqrt{(ab)}} = \sqrt{(2bx + x^2 + B^2)}$: ma quando $x = 0$, $\int (b+x) \cdot dy = 0$; dunque $\sqrt{(B^2)} = B = 0$. Avremo pertanto $\sqrt{(ab)} \cdot \frac{dx}{dy} = \sqrt{(2bx + x^2)}$, o pure $\frac{\sqrt{(ab)} \cdot dx}{\sqrt{(2bx + x^2)}} = dy$.

Questa formola riceve la seguente integrazione $y = l.(b + x + \sqrt{(2bx + x^2)})$ nella logaritmica della suttangente $\sqrt{(ab)}$, in cui quando si supponga $lb = 0$, non c'è bisogno di aggiungervi costante. In fatti posta $y = 0$, abbiamo $x = 0$, e sostituiti questi valori nell'ultima formola, troveremo $0 = lb$.

Costruzione

Col semiasse $DB = b$ (fig. 2.) si delinei l'iperbola equilatera GDF, i cui assintoti AE, BH: posta $DC = x$, sarà $CF = \sqrt{(2bx + x^2)}$, ed $FE = b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}$. Si descriva ora la logaritmica BE (fig. 3)

dalla

della suttangente $\sqrt{(ab)}$, e sia l'ordinata $AB = b$ il protonumero. Si accomodi ad essa curva l'ordinata DE uguale alla FE della Fig. 2. e si determinerà $AD = y$. Se adunque nella Fig. 4. si taglierà BD uguale alla AD della Fig. 3. e DC uguale alla BC della Fig. 2. i punti C in simil guisa determinati apparterranno alla curva ACH, che si vuol descrivere.

Scolio I.

Se x suppongasi infinitesima, si scoprirà $y = l(b+\sqrt{(2bx)})$. Facciasi $b : \sqrt{(ab)} :: \sqrt{(2bx)} : \sqrt{(2ax)}$, e ci accorgeremo essere $y = l(b+\sqrt{(2bx)}) = \sqrt{(2ax)}$: ma $y = \sqrt{(2ax)}$ è l'equazione al circolo del raggio $= a$ nella ipotesi di x minima; dunque a è il raggio osculatore della curva ACH nel punto A.

Scolio II.

Stimo necessario l'additar il metodo, per cui, essendo stabiliti i valori di b, e di x, si determini quello di $\sqrt{(ab)}$, di modo che la semilarghezza y dell'arco ne risulti di quella misura, che le circostanze richiedono. Si trovi sulle tavole il logaritmo di $b+x+\sqrt{(2bx+x^2)}$, e da esso si sottri il logaritmo di b, onde il residuo sia ~~ ~~ il logaritmo di $b+x+\sqrt{(2bx+x^2)}$ rispettivamente al protonumero b. E conciossiachè i logaritmi della medesima quantità, che hanno principio dallo stesso protonumero, stiano in diverse logistiche come le loro suttangenti; facciasi come il detto logaritmo preso dalle tavole relativo al protonumero b alla data semilarghezza y dell'arco, così la suttangente della logistica è in tavola $= 0,4342943$ a $\sqrt{(ab)}$, e ne nascerà $\sqrt{(ab)} = \dfrac{(0,4342943)\cdot y}{l(b+x+\sqrt{(2bx+x^2)}) - lb}$.

Sia per esempio $b = y = x = 5$, e troveremo, adempiuti i necessarj computi $l(b+x+\sqrt{(2bx+x^2)}) - lb = 0,5714059$, e $\sqrt{(ab)} = \dfrac{2,1714715}{0,5714059} = 4 - \dfrac{1157521}{5714059}$ prossimamente $= 4 - \frac{1}{5}$.

Scolio III.

Il metodo, che soggiungo, riuscirà più della premessa costruzione adattato alla pratica. Sia (Fig. 5.) EH la larghezza dell'arco Fa la saetta. Si stabilisca Fa : FA in ragione di $b : \sqrt{(ab)}$, e coll'artifizio spiegato nello Scolio III. del Problema I. si delinei la

catenaria

catenaria EDACH. Menata ad arbitrio l'ordinata BC, si divida in c in guisa tale, che sempre sia FA : Fa :: BC : Bc, ed il punto c, ed altri similmente determinati apparterranno alla curva EdacH, che dee descriversi. Tiro CG, cg parallele ad EH, e pongo AG = z, ag = x, GC = gc = y, e per minor imbroglio del calcolo $\sqrt{(ab)} = g$.

La catenaria EDACH, che passa pe' dati punti E, H, e pel punto A determinato dalla costruzione, corrisponda all'equazione $y = l(g + z + \sqrt{(2gz + z^2)})$ nella logaritmica della suttangente $= g$, che parimente si adopri in qualità di protonumero. Giacchè per la costruzione FA : Fa :: FG : Fg :: g : b, ne segue essere AG = z : ag = x :: g : b, onde si abbia $z = \frac{gx}{b}$. Sostituisco questo valore nella equazione della nostra catenaria, e mi si presenta $y = l(g + \frac{gx}{b} + \sqrt{(\frac{2g^2x}{b} + \frac{g^2x^2}{b^2})}) = l(\frac{g}{b} \cdot (b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}))$, essendo come sopra g suttangente, e protonumero. Che se prenderemo la quantità b per protonumero, come si è fatto nel Problema III., dovendo stare i numeri in ragione dei protonumeri, troveremo la stessa formola in esso Problema stabilita $y = l(b + x + \sqrt{(2bx + x^2)})$. La curva dunque EdacH, che passa per li punti dati E, a, H, di cui ho insegnata la costruzione, si adatta alla equazione $y = l(b + x + \sqrt{(2bx + x^2)})$ preso nella logaritmica della suttangente $\sqrt{(ab)}$, e relativa al protonumero b.

Scolio IV.

Essendo la pressione del punto C (Fig. 9.) per la direzione CG proporzionale a CG, egli patirà uno spiancamento proporzionale a CF: ma anche la pressione del punto A è proporzionale a CF, ed in oltre = ab; dunque lo spiancamento sofferto da qualunque punto C sarà = ab. La pressione verticale sostenuta dallo stesso punto è proporzionale ad FG: e conciossiachè alla FG sia proporzionale il peso KI, e di più eguale a $(\sqrt{ab} \cdot (2bx + x^2))$, si scoprirà tale altresì il valore della pressione verticale del punto C.

Problema IV.

Determinare la larghezza della pila, che faccia equilibrio collo sforzo di uno de' nostri archi.

Il punto C dell'arco AC (Fig. 10.) si appoggi alla pila GI, che ha il centro di gravità in K, per cui si conduca la verticale KN. Sia

come

come sopra $AB = b$, $AD = y$, $CD = b+x$, ed inoltre $GC = c$, $GH = q$, onde si abbia $GD = c+b+x$, $NK = \frac{c+b+x}{2}$, $NH = \frac{q}{2}$, e giusta a quanto si è dimostrato nel Problema II. ci si presenterà
$abc - \sqrt{ab.(2bx+x^2)})\cdot q = (\frac{c+b+x}{2})\cdot q^2$, la qual formola maneggiata a dovere ci dà

$$\frac{\sqrt{(ab(2c^2+2cb+2cx+2bx+x^2))} - \sqrt{(ab(2bx+x^2))}}{c+b+x} = q:$$

Corollario I.

Se le quantità c, b, x in due archi sieno rispettivamente uguali, ne risulterà la larghezza q della pila proporzionale a $\sqrt{ab}$ suttangente della logaritmica posta in opera nella costruzione: ma nella detta ipotesi la semilarghezza dell'arco $= y = l(b+x+\sqrt{(bx+x^2)}$ sta anch'essa come $\sqrt{ab}$; dunque sarà la larghezza q della pila in ragione della larghezza dell'arco.

Corollario II.

Posto che le dette grandezze c, b, x in due archi sieno simili, si troverà q come $\sqrt{ab}$, e quando $\sqrt{ab}$ sia come le mentovate grandezze, accetterà la stessa ragione anche q. In questa supposizione la larghezza dell'arco $2y$ starà in ragione delle quantità c, b, x, $\sqrt{ab}$, q, e gli archi riusciranno perfettamente simili.

Corollario III.

Pongasi $c = 0$, e si troverà $q = 0$, intorno alla qual conseguenza veggasi quello, che ho scritto nel Corollario II. del Problema II.

Corollario IV.

Che se $c = \infty$, ne seguirà essere $q = \sqrt{2ab}$, e questa è la massima spalla, che possa competere ad uno de' nostri archi, supponendo finita, e data tutte l'altre quantità.

Corollario V.

Dato che fosse $b = \infty$, si scoprirebbe $q = \sqrt{(2ac+2ax)} - \sqrt{2ax}$. In questa circostanza abbiamo $b+x+\sqrt{(2bx+x^2)} = b+\sqrt{2bx}$, ed essendo $\sqrt{2bx}$ minima in relazione a b, troveremo il valore di $y = l(b+x+\sqrt{(2bx+x^2)} = l(b+\sqrt{2bx})$ col mezzo della seguente analogia $b : \sqrt{ab} :: \sqrt{2bx} : \sqrt{2ax} = y$, equazione alla parabola, colla quale si adegua la curva ACH (Fig. 9.) nel caso di $b = \infty$. Si cavi la conseguenza, che gli elementi di un arco parabolico saranno vicende-

volmente

volmente equilibrati; allora quando sopra l'arco stesso s'alzi una muraglia di altezza infinita terminata da una linea orizzontale.

Sia $x = y = 5$, $c = 3 \cdot 5$; e giacchè $\frac{y^2}{2x} = a$, ne risulta $a = \frac{5}{2}$, e quindi $q = \surd(2ac + 2ax) - \surd 2ax = 5$, cioè a dire la spalla eguale alla metà della larghezza dell'arco. Osserveremo, che un'arco circolare della stessa larghezza, ed altezza, aggravato da un peso infinito richiede la spalla $q = 6 + \frac{3}{13}$.

Scolio I.

Avendo trovato nello Scolio II. dopo il Problema III. il valore di $\surd ab$, si rende noto quello della spalla q dovuta all'arco. Sia come nel citato Scolio $b = y = x = 5$, $\surd ab = 4 - \frac{1}{5}$, ed inoltre $c = 15$, ed i conti ci mostreranno

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\surd(ab.(2c^2 + 2cb + 2cx + 2bx + x^2)) \\ - \surd(ab.(2bx + x^2))\end{array}\right\}}{b + c + x} =$$

$q = 3$ prossimamente

Se fosse $c = 20$, si troverebbe $q = 3 + \frac{17}{40}$ adequatamente.

Vedremo nello Scolio dopo il Problema VIII., che un arco circolare della stessa larghezza, ed altezza, cioè a dire di proporzione Corintia, mentre l'ordine è sul piedestallo, e l'arco senza serraglio, ed in cui la muraglia sovrapposta ascende alla medesima altezza, richiede la spalla $q = 5 - \frac{1}{8}$ a un di presso (1.). Si deduce da ciò, che quantunque

---

(1.) Acciocchè chi legge possa intendere le cose, che qui ed altrove si accennano, esporrò brevemente le misure, che nell'Architettura soglio assegnare agli archi. Chiamato modulo il semidiametro della colonna, faccio la larghezza dell'arco di otto, o dieci moduli, secondochè l'ordine è privo, o fornito di piedestallo. La larghezza della pila, che separa due archi vicini, non può giusta il mio metodo esser minore di quattro moduli, venendo formata da due pilastri di un modulo per cadauno, che sostengono i due archi, e della colonna presa in mezzo dai mentovati pilastri, il diametro della quale si eguaglia a due moduli. L'altezza dell'arco la determino eguale alla colonna più il piedestallo, quando vi sia, meno un modulo, se l'arco è adorno col solo archivolto, o meno due moduli, se v'ha ancora il serraglio. Alla colonna Toscana do 14. moduli di altezza. Ammetto due colonne Doriche, una di 15., e l'altra di

quantunque i nostri archi equilibrati non tocchino le pile, e sieno a loro inclinati, sfiancano assai meno degli archi circolari, di cui le pile sono tangenti, e si deponga il pregiudizio, che essendo il resto pari, quelli arco sfianchi meno, i cui elementi ultimi non formano angolo colle pile.

Scolio II.

Nello Scolio dopo il Problema II. ho adattata agli archi retti, o rampanti la figura determinata nel Problema I. e nello Scolio IV. che segue lo stesso Problema, la quale eccettuato il caso di $b=a$, è curva anche nella parte superiore ach (Fig. 6.). Supponiamo ora che accettino i rampanti la figura del Problema III., che termina al di sopra in una linea retta, e a livello, ed assegnando ad un arco retto le stesse dimensioni, come nel citato Scolio dopo il Problema II., onde sia $c=64$, $b=4$, $x=1$, $y=17$, veggiamo quale delle due figure, supposti questi dati, richieda spalla maggiore. Lo Scolio II. appartenente al Problema III. stabilisce $Vab =$

$$\frac{0,4342943 \cdot y}{l(b+x+\sqrt{(2bx+x^2)})-lb}$$, o sia nel nostro caso $Vab = \frac{0,4342943 \cdot 17}{l(9+\sqrt{17})-l4}$

———————— =

di 16. moduli, ed altrettante Ioniche di 17. o di 14. moduli. Segue la colonna Composita di moduli 19., e la Corintia di moduli 20. chiude la serie. La somma dell'architrave, del fregio, e della cornice, che si può chiamar sopraornato, la stabilisco in tutti gli ordini eguale a quattro moduli, e dividendo per quattro l'aggregato della colonna e del sopraornato, o il detto aggregato meno un modulo, ho due altezze del piedestallo, delle prima delle quali mi servo, qualora l'arco ha il solo archivolto, e della seconda, quando ha parimente il serraglio. Le descritte misure ammettono una facile disposizione di triglifi, di dentelli, di modiglioni nei sopraornati, ed essendoci sempre due archi simili, uno proprio di un ordine a terra, e l'altro proprio di un ordine con piedestallo, ne deriva la bellissima conseguenza, che salva la somiglianza degli archi, si possano unire nella medesima struttura l'ordine principale con piedestallo, ed il secondario a terra: ma questo non è il luogo di maggiormente innoltrarmi in tale materia.

$= \frac{7,3630031}{0,2144154} = 34 \frac{728795}{2144154}$. Sostituiti questi valori nella formola del Problema IV., e risultandone $y = 43,611$, ci accorgeremo che una tale spalla è più grande di quella $41 - \frac{671}{9224}$, che conviene ad un arco di figura catenaria costrutto colle stesse misure $c = 64$, $b = 16$, $x = 2$, $y = 17$.

Scolio III.

Gli archi equilibrati, di cui ho tenuto discorso, difficilmente passeranno dalla teorica alla pratica per due motivi. E primieramente è bensì semplice la meccanica descrizione della curva catenaria del Problema I., ma la delineazione della curva del Problema III. riesce malagevole non solo agli Artefici, ma ancora ai comunali Architetti. Per far uso della costruzione da me proposta, ci vorrebbero le macchine per descrivere l'iperbola, e la logaritmica. Non essendo queste in pronto, si possono, trovato che sia il valore di $\sqrt{ab}$ conforme ho insegnato, determinare col computo molti valori delle ordinata $y = \frac{\sqrt{ab} \cdot l(b+x+\sqrt{(2bx+x^2)}) - lb}{0,4342943}$, prendendo i logaritmi dalle tavole, e per punti segnare con fisica esattezza la curva. Nè giova intieramente il ricorrere alla descrizione spiegata nello Scolio III. dopo il Problema III.; imperciocchè questa suppone determinato il valore di $\sqrt{ab}$, operazione, che non è gran fatto adattata all'intelligenza de' Pratici. In secondo luogo gli archi predetti non saranno mai ricevuti (eccettuati soltanto i ponti) nella nobile Architettura; perchè formando angolo colle pile, non fanno all'occhio bella comparsa. Riserbandoli adunque per quelle circostanze, nelle quali non si ha mira salvo che alla solidità, egli è d'uopo far transito alla considerazione degli archi circolari, che sono sempre stati, e saranno sempre mai nell'Architettura di uso frequentissimo, di sommo profitto, e di vago ornamento. Parlerò poscia degli archi ellittici, che nelle volte si pongono in opera con eleganza, nè porrò in non cale gli archi acuti assai costumati nel secolo decimo quarto, e con ragione poi dall'Architettura banditi.

Problema V.

Problema V.

Determinare la figura, e la quantità del peso, che si dee sovrapporre ad un arco circolare, acciocchè i suoi elementi siano mutuamente equilibrati.

Sia ACH (Fig. 11.) un quadrante di circolo, il cui raggio AL sia verticale. Si cerca la curva BDN, che determini la figura della muraglia ACHNDB, il cui peso tenga in mutuo equilibrio gli elementi di esso quadrante. Pongo $AB = b$, $AL = e$, $AI = y$, $IC = x$, $ID = z$, $CF = dy$, $FG = dx$, $OE = dz$, ~~CDE~~ $ABDC = p$, $CDEG = dp$ $= (x+z).dy$:

Per le cose dette negli antecedenti Problemi $ab\frac{dx}{dy} = p$: ma per la natura del circolo $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(e^2-y^2)}}$; dunque $\frac{aby}{\sqrt{(e^2-y^2)}} = p$, e per conseguenza $\frac{ab\,dy}{\sqrt{(e^2-y^2)}} + \frac{aby^2dy}{(e^2-y^2).\sqrt{(e^2-y^2)}} = \frac{abe^2dy}{(e^2-y^2).\sqrt{(e^2-y^2)}} = dp = (x+z).dy$, o sia $\frac{abe^2}{(e^2-y^2).\sqrt{(e^2-y^2)}} = x+z$. Noto, che essendo nel punto A $x = e$, $y = 0$, ne risulta $z = \frac{ab}{e} = AB = b$, e quindi si determina $a = e$, onde si abbia $\frac{e^3b}{(e^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z$.

Costruzione:

Facciasi $(ML)^3 = (e^2-y^2)^{\frac{3}{2}} : (AL)^3 = e^3 :: AB = b : CD = x+z$, ed il punto D apparterrà alla curva BDN, che ci siamo proposti di descrivere.

Corollario.

Ad $y = LH = e$ corrisponde $x+z = HN = \frac{e^3b}{0} = \infty$. Laonde acciocchè gli elementi dell'arco circolare siano mutuamente equilibrati, egli è d'uopo che vada crescendo all'infinito l'altezza del peso sovrapposto, il quale è altresì infinito siccome $= \frac{be^2}{0}$.

Posto per altro che sia $b < \frac{1}{3}e$, la curva ADN da principio discenderà, e la discesa continuerà sinattantochè diventa $3e^3b = (e^2-y^2)^2$, ovvero $y = \sqrt{(e^2-\sqrt{(3e^3b)})}$. Si dimostra ciò col metodo dei massimi, e dei minimi. Presa le differenze nella formola $\frac{e^3b}{(e^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z$, avremo $\frac{3e^3by\,dy}{(e^2-y^2)^2.\sqrt{(e^2-y^2)}} = dx+dz$, ed in questa ultima espressione dovrà essere $dz = 0$, quando a z competa un valore minimo, o massimo.

Nel

Nel sito AB, in cui IC = x = 0, AI = y = 0, ne risulta $dx + dz = 0$: ma nel punto A per la natura del circolo ACH $dx = 0$; dunque anche $dz = 0$. Per la qual cosa AB = b = z sarà un minimo, o massimo valore, secondo le varie grandezze, che si attribuiscono ad AB = b rispettivamente ad AL = a. Può essere frattanto z un altro minimo, o massimo valore corrispondente ad una grandezza di y = AI media fra il nulla ed AP = a, ed in tal caso si eguaglia solamente al nulla la flussione dz, onde si abbia $\frac{3a^3by\,dy}{(a^2-y^2)^2\cdot\sqrt{(a^2-y^2)}} = dx$: ma per l'equazione al circolo ACH, $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$; dunque $\frac{3a^3by\,dy}{(a^2-y^2)^2\cdot\sqrt{(a^2-y^2)}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, o sia $3a^3b = (a^2-y^2)^2$, e finalmente $y = \sqrt{(a^2-\sqrt{3a^3b})}$. Sarà $y = 0$ e l'unico minimo valore di z cadrà in AB, quando sia $a^2 = \sqrt{3a^3b}$, e perciò $\frac{1}{3}a = b = AB$. Acciocchè poi alla grandezza di y = AI media fra il nulla, ed il raggio del circolo si riferisca un minimo, o massimo valore di z, egli è necessario che sia $\sqrt{3a^3b} < a^2$, e per conseguenza $b < \frac{1}{3}a$, il che &c.

Problema VI.

Determinare la larghezza della pila atta a resistere allo sfiancamento d'uno de' nostri archi circolari.

Sia GI (fig. 12.) la pila, il cui centro di gravità K, atta ad equilibrare lo sforzo delli archi AC. Ritenute le superiori denominazioni, facciasi CG = c, GH = z. Per le cose dimostrate nel Problema II, avremo $bac - \frac{bay\cdot z}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \left(c + \frac{a^3b}{(a^2-y^2)\cdot\sqrt{(a^2-y^2)}}\right)\cdot\frac{z^2}{2}$, e ridotta l'equazione

$$\sqrt{\left(\frac{2bca\cdot(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{c\cdot(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+a^3b} + \frac{a^2b^2y^2\cdot(a^2-y^2)^2}{\left(c\cdot(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+a^3b\right)^2}\right)} - \frac{bay\cdot(a^2-y^2)}{c\cdot(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+a^3b} = z.$$

Corollario I.

Suppongasi y minima, e si troverà $\sqrt{\left(\frac{2bca}{c+b}\right)} = z$, e questa è la massima larghezza z, che possa competere alla pila GI.

Corollario II.

Ad $y = a$ corrisponde $z = 0$, essendo in tal caso la forza sfiancante rispettivamente nulla posta al paragone colla infinita forza premente. Questa supposizione matematica considera la linea GC atta a sostenere il peso infinito AADC, e perciò infinitamente rigida, ed inflessibile. In riguardo al fisico si può conchiudere, che al crescere

crescere del peso AADC può la larghezza GH dalla spalla calare sino a quel segno, che la materia componente la pila GI non corra pericolo di stritolarsi.

Scolio.

L'esperienza, che colla mia teorica va d'accordo, ha insegnato agli Artefici, che se non caricano i fianchi d'un arco circolare, si alzano questi, e si abbassa la sommità, di modo che la struttura corre pericolo di scomporsi, e di precipitare. Non c'è per altro bisogno di applicar loro un peso grandissimo, bastando di alzare la pila, e spianare i fianchi a livello del colmo dell'arco, e supplendo a quel peso, che ci vorrebbe di più, la tenacità del cemento, e della materia, e la notabilissima resistenza delle fregagioni. Che se le circostanze lo permettessero, gioverebbe il determinare AA più picciola che fosse possibile, salva la consistenza dell'arco, e adattare il peso sovrapposto almeno a un di presso alla curva AD, la quale per un buon tratto discenderebbe. Ma supponendo i fianchi, e le pile alzati a livello del punto A, giacché gli esperimenti ci documentano, che l'arco non cangia figura, possiamo considerare i suoi elementi siccome equilibrati, e cercare il suo spingimento contro la pila.

Problema VII.

Determinare la forza spingente, e premente, che sostiene qualunque punto d'un arco circolare, mentre la muraglia sovrapposta è terminata da una linea orizzontale.

Al quadrante circolare ACH (Fig. 13.) sia sovrapposto il peso ACHNA, che termina nella linea orizzontale AN, e si cerchi la forza spingente, e premente, che sostiene qualunque punto C. Nel precedente Problema V. ho scoperta la forza orizzontale sofferta dal punto A (Fig. 11.) = ba. Non dipende essa dal peso ACDA, che sempre più cresce di altezza; imperciocché persiste invariata anche nella circostanza, che al punto C vicinissimo al punto A si sottoponga la pila, in cui il peso ACDA = AB.MC = by ha lo stesso valore, come se la linea ADN fosse retta, e a livello. Ciò premesso, nella orizzontale AT (Fig. 13) taglio AT = ba, e nella verticale TR

la

la linea TO eguale al peso minimo AEFB. Giacchè il punto A. è spinto dal nisa TA, egli è di uopo che il peso TO si risolva nelle di = forze TA, AO, la seconda delle quali spinge il punto E: ma questa si compone dalle due AT sfiancante, TO premente; dunque la forza sfiancante del punto E = ba, e la premente = AEFA = p peso sostenuto dall'arco AE.. Segue ora l'arco minimo EK, ch'è aggravato dal peso EFGK, e fatta OP = EFGK, conduco la linea AP. Se ha da conservarsi l'equilibrio, il punto E dev'essere spinto per la direzione OA colla forza OA, e quindi la forza OP uguale al peso FK dee comporsi dalle due, OA che spinge il punto E, AP che spinge il punto K: ma la forza AP si risolve nella sfiancante AT = ba, e nella premente TP = AAGK = p; dunque anche le forze sfiancante e premente spinganti il punto K si agguagliano al rettangolo AAN, ed al peso AAGK. Collo stesso progresso proverò, che le due nominate forze rispettivamente al punto qualunque C pareggiano il rettangolo AAN, ed il peso AADC.

Sia come sopra LA = a, AB = b, AM = x, MC = y, onde si abbia AT = ba, AKCI = $\int x\,dy = \int\left(\frac{ax\,dx - x^2dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}\right)$, AB.AI = by, e conseguentemente il peso AKCIDB = by + $\int x\,dy$. Si progredisca poscia alla soluzione del sottoposto Problema.

Problema VIII.

Determinare la larghezza della pila capace di resistere allo sfiancamento d'un arco circolare, sopra di cui sia fabbricata una muraglia terminata da una linea orizzontale.

Pongo al solito (fig. 10.) GC = c, GH = q, ritenute le altre denominazioni, e conforme a quanto si è dimostrato nel Problema II., avremo $ba.c - (by + \int x\,dy).q = (c+x+b).\frac{q^2}{2}$, e dopo le necessarie operazioni $\sqrt{\left(\frac{2bca}{c+x+b} + \frac{(by+\int x\,dy)^2}{(c+x+b)^2}\right)} - \frac{by - \int x\,dy}{c+x+b} = q$.

Scolio.

Egli è di uopo ridurre a computo la quantità by + $\int x\,dy$ per adoperare con profitto la nostra formola. Sia L il centro dell'arco AC, e tirati i raggi LA, LC, si conduca l'ordinata MC.

La

La Trigonometria c'insegna il valore dell'angolo L nel triangolo MLC, in cui sono noti i lati, e l'angolo M retto. La grandezza del predetto angolo L si può altresì trovare praticamente col mezzo della misura. Si renda dunque cognita l'aja del Settore LAC, e sottratto il triangolo MLC, anche la superficie MAC, che levata dal rettangolo MD, ci manifesta la superficie cercata AADC = $by + \int x dy$.

Corollario I.

Se AC sia un quadrante, avremo $x = y = a$, e supposto il quadrante al raggio come 11 : 7, $\int x dy = \frac{3a^2}{14}$. Quindi scopriremo

$$\sqrt{\left(\frac{2bca}{c+b+a} + \frac{\left(ab + \frac{3}{14}a^2\right)^2}{(c+b+a)^2}\right)} - \frac{ab - \frac{3}{14}a^2}{c+b+a} = q.$$

Corollario II.

Due archi circolari simili scemi, o di tutto sesto dimandano spalle simili.

Scolio.

Suppongasi la grossezza d'una volta AA $= \frac{a}{14}$, e l'altezza della pila $c = 3a$, ed essendo l'arco di tutto sesto, fatti i computi scopriremo $q = \frac{15a}{57}$, cioè la larghezza della muraglia, che (prescindendo dalle fregagioni, e dalla tenacità del cemento, che lega le parti dell'arco, e del parete sovrapposte l'una coll'altra, e colla pila, e il piede di questa colle fondamenta) reggerebbe allo spancamento, uguale a un di presso all'ottava parte della larghezza della volta.

Si cerchi la spalla d'un arco d'ordine Toscano a terra, e senza serraglio, sopra l'archivolto del quale ci sia il sopraornato. Richiede questa ipotesi, giusta il mio metodo, $a = 4$, $c = 9$, $b = 5$, e ridotto il computo si troverà $q = 3\frac{1}{3}$ prossimamente, cioè a dire la spalla eguale a $\frac{5}{12}$ della larghezza dell'arco. Se l'arco avrà serraglio, non si muterà sensibilmente la spalla, come si raccoglie dal computo.

Passando al limite opposto, cioè a dire al Corintio a terra, e non essendoci il serraglio, avremo $a = 4$, $c = 15$, $b = 5$, e dal computo dedurremo $q = 4\frac{1}{8}$, valore prossimamente eguale ad

$a = 4$

$e = 4$.

Questi computi ci documentano, quanto la pratica si avvicini alla teorica, assegnandosi nelle buone strutture architettoniche una spalla agli archi uguale alla metà della loro larghezza, quando gli ordini stanno a terra.

Nel Toscano sul piedestale colli arco senza serraglio, si fa $e = 5$, $c = 12\frac{1}{2}$, $b = 5$, e adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenta $q = 4\frac{1}{11}$, vale a dire uguale a un di presso a $\frac{2}{5}$ della larghezza dell'arco, come effettivamente si costuma dai più esatti Architetti.

Il Corintio sul piedestallo colli arco senza serraglio, in cui $e = 5$, $c = 20$, $b = 5$, richiederebbe $q = 5 - \frac{1}{8}$, e praticamente si determina $q = 4$. Egli è di uopo frattanto riflettere, che il piedestallo, la colonna, i fregamenti, la tenacità della calcina, che unisce la pila colle fondamenta, coll'arco, e colla muraglia sovrapposta, aggiungono tale resistenza, che la spalla stabilita dalla pratica è più che sufficiente a non lasciarsi vincere dallo sfiancamento, conforme l'esperienza ci fa toccare con mano.

Se nella formola esprimente il valore di q porremo infinita l'altezza b del peso, che aggrava l'arco, scopriremo $\sqrt{(2ac+a^2)} - a = q$. Lo stesso valore ci si affaccia considerando b, q in qualità di incognita, e cercando mediante il noto metodo la massima grandezza di q, e perciò $\sqrt{(2ac+a^2)} - a$ è la massima spalla, che dimanda un arco, sopra di cui sia alzata un'altissima muraglia, per esempio una torre.

Ricorro ai due limiti estremi, e ad un esempio di mezzo fra essi, ed osservo che nel Toscano a terra colli arco senza serraglio essendo $e = 4$, $c = 9$, ne risulta $q = 5\frac{3}{14} = 5\frac{1}{5}$ prossimamente. Al Dorico con piedestallo, e colli arco privo di serraglio competere $e = 5$, $c = 15$, valori che sostituiti nella formola danno $q = 4\frac{3}{13}$. Abbiamo veduto nel Corollario V. del Problema IV., che ad un arco equilibrato di figura parabolica fornito di pari larghezza, altezza, e saetta, che sostiene un peso infinito terminato da una linea orizzontale, basta la spalla $q = 5$. Ne Corintio sul piedestallo colli arco privo di serraglio abbiamo $e = 5$, $c = 20$, e questi dati determinano $q = 10$,

cioè

cioè la spalla uguale alla larghezza dell'arco: massima larghezza di pila, che possa assicurare l'arco più svelto, che si adoperi in Architettura, di due quadranti e mezzo, quando ad esso si addossi un immenso peso, e si prescinda dalla resistenza altrove notata.

Non debbo trascurare la riflessione, che se sopra un arco ce ne sia un altro, o una loggia, o un balcone, scema molto l'energia dello spiancamento. Esempigrazia nel caso della loggia tutto il peso delle colonne isolate collocate sopra quelle, che fiancheggiano l'arco, ed il peso da esse sostenuto cade sopra le pile. Interviene per tanto lo stesso, come se nella formola del Corollario I. crescesse molto l'altezza della pila $c+b+e$ in riguardo alla specie b, rimanendo invariato tutto il restante, ed anche il valore di b al di sopra dell'arco, e ch'essendo $c+b+e$ un divisore, cali notabilmente la grandezza di q.

Problema IX.

Determinare la figura, e la quantità del peso, che si dee sovrapporre ad un arco ellittico, acciocchè i suoi elementi siano vicendevolmente equilibrati.

Sia ACH (Fig. 11.) un quadrante di ellisse, in cui il semiasse AL sia verticale: si cerca la curva ADN, che determini la figura della muraglia ACHNDA, il cui peso tenga vicendevolmente equilibrati gli elementi di esso quadrante. Faccio $AB = b$, $AL = a$, $LH = f$, $AI = y$, $IC = x$, $ID = z$, $CF = dy$, $FG = dx$, $OE = dz$, $ACDB = p$, $CGED = dp = (x+z) \cdot dy$.

Le dimostrazioni degli antecedenti Problemi m'insegnano essere $\frac{ab\,dx}{dy} = p$: ma nell'ellisse $\frac{dx}{dy} = \frac{ay}{f\sqrt{(f^2-y^2)}}$; dunque $\frac{aby}{f\sqrt{(f^2-y^2)}} = p$, e presa la differenza $\frac{ab\,a\,dy}{f\sqrt{(f^2-y^2)}} + \frac{ab\,a\,y^2\,dy}{f\cdot(f^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = dp = (x+z)\cdot dy$, e finalmente $\frac{abaf}{(f^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z$. Avvertasi che nel punto A essendo $x = 0$, $y = 0$, si scopre $z = \frac{aba}{f^2} = AB = b$, e conseguentemente $a = \frac{f^2}{a}$ = al raggio osculatore del punto A. Sostituito questo valore, la formola prende il seguente aspetto $\frac{bf^3}{(f^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z$.

Costruzione.

Deducendosi dalla nostra formola l'analogia $(f^2-y^2)^{\frac{3}{2}} : f^3 ::$

b

$b : x+z$, si faccia $(\sqrt{((LH)^2-(MC)^2)})^3 : (LH)^3 :: AB : CD$, ed il punto D competerà alla curva ADN, a cui dee adattarsi la muraglia HCABDN da fabbricarsi sopra l'arco ellittico ACH.

Corollario.

Quando $y = LH = f$, troveremo $x+z = HN = \frac{bf^3}{0} = \infty$, e perciò l'equilibrio fra gli elementi dell'arco ellittico ricerca, che cresca senza alcun limite l'altezza del peso sovrapposto, ch'è infinito, ed $= \frac{bf^2}{0}$. Se $b < \frac{1}{3}a$, la curva ADN discenderà finchè diventi $y = \sqrt{(f^2 - f^2\sqrt{(\frac{3b}{a})})}$. La dimostrazione dipende dal metodo dei massimi, e dei minimi, ed è simile a quella, che si legge nel Corollario dopo il Problema V.

Problema X.

<u>Determinare la larghezza della pila atta a resistere allo spiancamento di uno de' nostri archi ellittici.</u>

Sia GI (fig. 12.) la pila, il cui centro di gravità K, idonea per far equilibrio collo sforzo dell'arco AC. Stando invariate le determinazioni già stabilite, pongo $CG = c$, $GH = g$: Conforme a quanto ho provato nel Problema II. avremo $\frac{bf^2c}{a} - \frac{bfy \cdot g}{\sqrt{(f^2-y^2)}} =$

$\left(c + \frac{bf^3}{(f^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \frac{g^2}{2}$, dalla qual formola si deduce

$$g = \sqrt{\left(\frac{2bcf^2 \cdot (f^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot (c \cdot (f^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + bf^3)} + \frac{b^2f^2y^2 \cdot (f^2-y^2)^2}{(c \cdot (f^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + bf^3)^2}\right)} - \frac{bfy \cdot (f^2-y^2)}{c \cdot (f^2-y^2)^{\frac{3}{2}} + bf^3}.$$

Corollario I.

Suppongasi y infinitesima, e ne nascerà $g = \sqrt{\left(\frac{2bcf^2}{a \cdot (c+b)}\right)}$, massima larghezza, che può convenire alla pila GI.

Corollario II.

Ad $y = f$ si riferisce $g = 0$, ed intorno a ciò veggasi quello che ho scritto nel Corollario III. del Problema VI.

Scolio.

Anche i fianchi di un arco ellittico, non meno che quelli di un circolare, hanno bisogno di essere caricati, acciocchè non si alzino, mentre si abbassa la sommità con manifesto rischio di scomporsi, e di rovinare. Richiami chi legge a memoria quello che ho detto nello Scolio del Problema VI.

Problema

Problema XI.

Determinare la forza sfiancante, e premente, che sostiene qualunque punto di un arco ellittico, mentre la muraglia sovrapposta è terminata da una linea orizzontale.

Il quadrante ellittico ACH (Fig. 13.) sostenga il peso ACHNB, che finisca nella orizzontale AN, e si indaghi la forza sfiancante, e la premente, che soffre qualunque punto C. Nell'antecedente Problema IX. abbiamo trovato lo sforzo orizzontale sostenuto dal punto $A = \frac{bf^2}{a}$, e questo indipendentemente dal peso ACDB (Fig. 11.), che va crescendo di altezza; imperciocchè rimane lo stesso anche quando il punto C infinitamente prossimo al punto A si appoggia alla pila, nel qual caso il peso ACDB = AB · MC = by ha il massimo valore, come se la linea BDN fosse retta, ed orizzontale. Ciò posto nella orizzontale AT (Fig. 13.) si segni $AT = \frac{bf^2}{a}$, e nella verticale TR la linea TO minima eguale al peso infinitesimo AEFB. Venendo spinto il punto A dalla forza TA, egli è necessario che il peso TO si risolva nelle due potenze TA, AO; l'ultima delle quali eserciti il suo niso contro il punto E; ma questa si compone delle due AT sfiancante, TO premente; dunque la forza sfiancante del punto E si eguaglia a $\frac{bf^2}{a}$, e la premente al peso AEFB = p, ch'è sostenuto dall'arco AE. Se il punto E ha da stare in equilibrio, dee sostenere una contrappressione per la direzione OA. Tagliato adunque l'arco minimo EK, e determinata OP = EKGF, il peso OP dee risolversi nelle due forze OA, AP, la seconda delle quali spinge il punto K, e si risolve nella sfiancante $AT = \frac{bf^2}{a}$, e nella premente TP = ABGK = p; peso sostenuto dall'arco AK. Seguitando collo stesso progresso proverò essere la forza sfiancante, e premente di qualunque punto C, una $= \frac{bf^2}{a}$, e l'altra ACDB = p: il che &c.

Problema XII.

Determinare la larghezza della pila valevole a resistere allo sfiancamento di un arco ellittico, che sostenti una muraglia terminata da una linea orizzontale.

Messe come sopra (Fig. 10.) le linee GC = c, GH = g, e non pensando mano nelle altre denominazioni, la verità dimostrata nel

Problema

Problema II. ci guidano alla equazione $\frac{bf^2}{a} \cdot c - (by + \int x dy) \cdot q = (c+x+b) \cdot \frac{q^2}{2}$; e adempiute le appropriate operazioni

$$\sqrt{\left(\frac{2bcf^2}{a \cdot (c+x+b)} + \frac{(by+\int x dy)^2}{(c+x+b)^2}\right)} - \frac{by - \int x dy}{c+x+b} = q.$$

Scolio.

Per ridurre a computo la quantità $by + \int x dy$, si ricorra allo Scolio dopo il Problema VIII., e si trovi l'aja della porzione di circolo, il cui raggio $= a$, corrispondente all'assissa AM, ed all'ordinata $MC \cdot \frac{a}{f}$. Si istituisca poscia l'analogia come $a : f$, così l'aja trovata al quarto termine proporzionale, che si aguaglierà all'aja MAC, e sottratta questa dal rettangolo MD, si conoscerà la superficie cercata $AADC = by + \int x dy$.

Corollario I.

Sia AC un quadrante, onde si abbia $x = a$, $y = f$, e supponendo il quadrante circolare al raggio come $11 : 7$, ne risulta $\int x dy = \frac{3af}{14}$. Effettuate le sostituzioni, ci si presenterà

$$\sqrt{\left(\frac{2bcf^2}{a \cdot (c+a+b)} + \frac{\left(bf + \frac{3af}{14}\right)^2}{(c+a+b)^2}\right)} - \frac{bf - \frac{3af}{14}}{c+a+b} = q.$$

Corollario II.

Due archi ellittici simili o scemi, o interi richiedono le spalle simili.

Corollario III.

Se in due archi uno ellittico, e l'altro circolare saranno rispettivamente uguali le grandezze b, c, a, le spalle si riferiranno nella ragione di $f : a$, cioè a dire delle larghezze degli archi.

Corollario IV.

Supposta minima la saetta $= a$ di un arco di tutto sesto, e la larghezza $= 2f$ finita, diviene $q = \infty$, prescindendo dalla resistenza, dalla quali in altri simili incontri ho fatto parola.

Scolio.

Messo come nello Scolio del Problema II. $c = 64$, $b = 4$, $a = 1$, $f = 17$, e fatti i computi scopro $q = 50 + \frac{32\frac{3}{4}}{75}$. Nel citato Scolio abbiamo trovato $q = 41 - \frac{471}{9224}$, e quindi ci accorgeremo, quanto sia più profittevole l'assegnare ad un Romanato la curva equilibrata determinata nel Problema I. piuttosto che una mezza ellisse, quantunque

questa

questa tocchi la pila, quella formi con esse un angolo, che molto al retto si accosta.

Nè interamente giova il supporre il Rimenato non una mezza ellisse, ma bensì una porzione di essa, in cui all'assissa $AM = x = 1$. (fig. 13.) corrisponda l'ordinata $MC = y = 17$; imperciocchè nel caso più favorevole, in cui per avere il minimo valore del raggio osculante il punto A, fossero i semiassi e, f infiniti colla condizione che si avverasse l'eguaglianza $\frac{2f^2}{e} = (17)^2 = 289$, e l'equazione all'ellisse $2ex - x^2 = \frac{e^2}{f^2} . y^2$ si trasformasse nella seguente alla parabola $\frac{2f^2}{e} . x = y^2$, onde si avesse $\int x dy = \frac{1}{3} xy = \frac{17}{3}$; ne risulterebbe $q = 43 + \frac{1}{12}$; spalla maggiore della $21 - \frac{1431}{9224}$ competente al Rimenato di figura catenaria.

Corollario V.

Quando essendo tutte l'altre quantità finite, diventasse infinito il semiasse verticale e dell'ellisse, si troverebbe nella formola generale $q = 0$: ma questa supposizione è matematica, e non fisica. Richiamino i Lettori a memoria quello che ho detto nel Corollario II. del Problema VI

Corollario VI.

Se $AB = b$ fosse minima in relazione all'altre grandezze, ne risulterebbe $q = 0$.

Scolio.

Faccio come nello Scolio del Problema VIII. $c = 3e$, $b = \frac{e}{14}$, e trovo che una volta ellittica di tutto sesto richiederebbe la spalla $q = \frac{15f}{57}$, cioè a dire uguale all'ottava parte in circa della larghezza $2f$, non altrimenti che una volta circolare, in cui parimente $c = 3e$, $b = \frac{e}{14}$, a cui è bisognevole la spalla $q = \frac{15e}{57}$. Quindi essendo il resto pari, due volte ellittica, e circolare richiedono le spalle proporzionali alla loro larghezza, conforme ho notato nel Corollario III.

Corollario VII.

Finalmente fingendo $b = \infty$, la formola del Corollario I. si riduce alla seguente $f\sqrt{\left(\frac{2c+e}{e}\right)} - f = q$. Nello Scolio del Problema VIII. ho avvertito, che un arco circolare di proporzione comune aggravato da un peso infinito, in cui $c = 4e$, esige la spalla $q = 2e$ larghezza dello stesso. Similmente in un arco ellittico, che sostenti un immenso

peso

paso, fatta $c = 4e$, ci si presenterà $q = 2f$, cioè a dire la spalla eguale alla sua larghezza. Questo arco può essere o più svelto, o più depresso del Cerchio, secondo che f è minore, o maggiore di e.

Problema XIII.

Determinare la figura, e la quantità del paso, che si dee sovrapporre ad un arco di sesto acuto, acciocchè i suoi elementi stiano in mutuo equilibrio.

Gli archi di sesto acuto sono formati da due porzioni eguali di circolo toccanti la pila, e minori del quadrante, le quali s' incrocicchiano alla metà della larghezza dell' arco. Sia dunque ACH (Fig. 14.) la metà d' un arco acuto, ed f il suo centro: si cerca la curva ADN, in cui finisca la muraglia ACHNDA, il paso della quale tenga in vicendevole equilibrio gli elementi dell' arco mentovato. Pongo $AB = b$, $AL = e$, $LH = f$, $fH = fA = g = \frac{e^2+f^2}{2f}$, onde abbiasi $fL = g - f = \frac{e^2-f^2}{2f}$, $MC = y$, $AM = x$, $CD = x+z$, $CF = dy$, $FG = dx$, ?E $= dz$, $ACDB = p$, $CGED = dp = (x+z)\cdot dy$. Al punto C si conduca la tangente RCQ, la quale s' interseca nel punto I colla tangente AS del punto A, e per I si delinei parallela ad AL la retta IK eguale al paso ACBD, che comprime l'arco AC. Al circolo ACH compete l' equazione $e^2 - 2ex + x^2 = (2g - f + y)\cdot(f - y) = 2g\cdot(f-y) - f^2 + 2fy - y^2$, e sostituendo in cambio di g il suo valore, $f\cdot(2ex - x^2) = (e^2 - f^2)\cdot y + fy^2$; da cui si ricava $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{(e^2-f^2)\cdot y + 2fy^2}{2\sqrt{(e^2f^2 + (f^2-e^2)\cdot fy - f^2y^2)}}$, valore della suttangente MQ. Quindi avremo $QC = \frac{(e^2+f^2)\cdot y}{2\sqrt{(e^2f^2 + (f^2-e^2)\cdot fy - f^2y^2)}}$, ed il seno dello angolo $MQC = TIR$ uguale ad $\frac{MC}{QC} = \frac{2\sqrt{(e^2f^2 + (f^2-e^2)\cdot fy - f^2y^2)}}{e^2+f^2}$ = Seno TIR.

Nel triangolo ALS abbiamo $AL = e$, $LS = \frac{(AL)^2}{fL} = \frac{2e^2f}{e^2-f^2}$, $AS = \frac{e\cdot(e^2+f^2)}{e^2-f^2}$, ed il seno dello angolo $LAS = TIS$ uguale ad $\frac{LS}{AS} = \frac{2ef}{e^2+f^2}$ = Seno TIS.

Trovati i due seni degli angoli TIS, TIR, la Trigonometria ci insegna a determinare il seno dell' angolo RIS loro differenza, onde ci si presenti $\frac{2ef}{e^2+f^2}\cdot\sqrt{\left(1 - \frac{4e^2f^2 - (4f^2+4e^2)\cdot fy + 4f^2y^2}{e^4+2e^2f^2+f^4}\right)} - \sqrt{\frac{(4e^2f^2 + (4f^2-4e^2)\cdot fy - 4f^2y^2)}{e^2+f^2}}$.

$\sqrt{\left(1 - \frac{4e^2f^2}{e^4+2e^2f^2+f^4}\right)} = \frac{2ef\cdot(e^2-f^2+2fy) \quad (-e^2+f^2)\cdot\sqrt{(4e^2f^2+(4f^2-4e^2)\cdot fy - 4f^2y^2)}}{e^4+2e^2f^2+f^4}$

=

= Seno RIS.

Ciò premesso, osservo che la forza IA, che spinge il punto A, si oppone all'angolo KIR, il cui compimento a due retti TIR, ed il peso KI all'angolo AIR, il cui compimento a due retti RIS. Avremo dunque $ab : p :: \frac{\sqrt{(4a^2f^2+(4f^2-4a^2)\cdot fy-4f^2y^2)}}{a^2+f^2} :$ $\frac{2af\cdot(a^2-f^2+2fy)\ (-a^2+f^2)\cdot\sqrt{(4a^2f^2+(4f^2-4a^2)\cdot fy-4f^2y^2)}}{(a^2+f^2)^2}$, o sia $p = \frac{abaf\cdot(a^2-f^2+2fy)}{(a^2+f^2)\cdot\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)fy-f^2y^2)}} - \frac{ab\cdot(a^2-f^2)}{a^2+f^2}$. Prendo le differenze, e scopro $dp = \frac{\frac{1}{2}abaf^2\cdot(a^2+f^2)\cdot dy}{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)^{\frac{3}{2}}} = (x+z)\cdot dy$, e dividendo per dy, $\frac{\frac{1}{2}abaf^2\cdot(a^2+f^2)}{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z$. Nel punto A è $x=0$, $y=0$, $z=b$, e perciò $\frac{1}{2}abaf^2\cdot(a^2+f^2) = ba^3f^3$, formola da cui si deduce $a = \frac{2a^2f}{a^2+f^2}$.

Fatta la sostituzione di questo valore, scopriremo

$$\frac{ba^3f^3}{(a^2f^2+(f^2-a^2)fy-f^2y^2)^{\frac{3}{2}}} = x+z.$$

Costruzione.

Di sopra ho notato essere $f\cdot(2ax-x^2) = (a^2-f^2)\cdot y+fy^2$, dalla qual formola si ricava $a-x = \frac{\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)}}{f} = ML$. Abbiamo in oltre $AL = a$, $AB = b$, $CD = x+z$: e poichè la scoperta equazione si trasforma nell'analogia $\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)} : a^3 :: b : x+z$, facciasi $(ML)^3 : (AL)^3 :: AB : CD$, ed il punto D competerà alla curva ADN, che si dovea costruire.

Corollario.

Posta $y=f$, ci si presenterà $x+z = HN = \frac{ba^3}{0} = \infty$, e quindi acciocchè gli elementi d'un arco acuto stiano in vicendevole equilibrio, è necessario che cresca all'infinito l'altezza del peso sovrapposto, il quale è parimente infinito. Ma quantunque l'altezza del mentovato peso sempre più s'aumenti sino a giungere all'infinito, nulladimeno la curva ADN può da prima discendere. Accaderà ciò quando sia $b < \frac{1}{3}a$, e continuerà la discesa sinattantochè si abbia $y = \frac{\sqrt{((a^2+f^2)^2-4f^2a\sqrt{3ba})}+f^2-a^2}{2f}$, valore, che quanto più la grandezza b sarà minore di $\frac{1}{3}a$, tanto maggiormente si accosterà ad $f = LH$, onde la nostra curva principj a salire

sempre

sempre più vicinamente all'assintoto HN. Tralascio la dimostrazione dipendente dal metodo dei massimi, e dei minimi, essendo essa simile a quella, ch'è contenuta nel Corollario dopo il Problema V.

Scolio I.

Abbiamo veduto che il punto A per la direzione IA sostiene lo sforzo $ab = \frac{2ba^2f}{a^2+f^2}$, ed abbiamo trovato essere $LS = \frac{2a^2f}{a^2-f^2}$, $AS = \frac{a \cdot (a^2+f^2)}{a^2-f^2}$. Si faccia $AS = \frac{a \cdot (a^2+f^2)}{a^2-f^2} : LS = \frac{2a^2f}{a^2-f^2} :: \frac{2ba^2f}{a^2+f^2} : \frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$, $AS = \frac{a \cdot (a^2+f^2)}{a^2-f^2} : AL = a :: \frac{2ba^2f}{a^2+f^2} : \frac{2ba^2f \cdot (a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$, e $\frac{4ba^3}{(a^2+f^2)^2}$ sarà la forza, che patisce il punto A per la direzione orizzontale, e $\frac{2ba^2f \cdot (a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$ è ciò, colla quale viene spinto verticalmente all'insù per opera dell'arco quantunque minimo AC aggravato dal peso ACDB. Da altrettanta forza è spinto in alto dall'arco corrispondente Ac, laonde la total forza verticale $= \frac{4ba^2f \cdot (a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$. Questa è una notabilissima imperfezione degli archi di sesto acuto, tentando sempre la nominata forza di scompaginarli, se non in quanto le si oppongono la tenacità della materia, e le fregagioni.

Scolio II.

Passo a determinare la spinta, che soffre il punto C per la direzione QC. La forza IC si oppone all'angolo AIK = TIS, il cui seno $= \frac{2\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}}{a^2+f^2}$. Avremo pertanto $\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)} : af :: \frac{2ba^2f}{a^2+f^2} : \frac{2ba^3f^2}{(a^2+f^2) \cdot \sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}}$, e l'ultimo termine si agguaglia alla spinta cercata. Si troverà lo sfiancamento del punto C col mezzo dell'analogia $QC = \frac{(a^2+f^2) \cdot y}{2\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}} : MC = y :: \frac{2ba^3f^2}{(a^2+f^2)\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}} : \frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$ forza sfiancante del punto qualunque C uguale a quella del punto A, e sempre costante. Si scoprirà la forza premente facendo $QC = \frac{(a^2+f^2) \cdot y}{2\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}} : NQ = \frac{(a^2-f^2) \cdot y + 2fy^2}{2\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)fy - f^2y^2)}} :: \frac{2ba^3f^2}{(a^2+f^2) \cdot \sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}} : \frac{2ba^3f^2 \cdot (a^2-f^2+2fy)}{(a^2+f^2)^2 \cdot \sqrt{(f^2-a^2) \cdot fy - f^2y^2)}}$. Questa forza premente pareggia il

peso

peso ACDA $= p = \dfrac{2ba^3f^2.(a^2-f^2+2fy)}{(a^2+f^2)^2.\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2).fy-f^2y^2)}} - \dfrac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$

accresciuto dalla forza $\dfrac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$, dalla quale per opera dell'arco AC, il cui peso ACDA il punto A viene spinto all'insù.

Scolio III.

Tirata pel punto l la verticale lb, si compia il quadrante HCAa, e si continui la curva NDA sino in b. Se nella equazione della curva ADN scoperta nel Problema XIII. porremo $y = lb = \dfrac{f^2-a^2}{2f}$, troveremo $ab = \dfrac{4ba^3f^3}{(a^2+f^2)^3}$. Ci documenta il Problema V. che il punto a del quadrante HCAa, i cui elementi sono equilibrati, è spinto orizzontalmente dalla forza $la.ab = \dfrac{(a^2+f^2)}{2f}.\dfrac{4ba^3f^3}{(a^2+f^2)^3} = \dfrac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$, che è quella stessa, che spinge per la direzione medesima il punto A. Dallo stesso Problema abbiamo imparato essere $aAb = \dfrac{la.ab.lL}{AL}$ $= \dfrac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}.\dfrac{(a^2-f^2)}{2f.a} = \dfrac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$, valore della forza, che spinge all'insù il punto A per opera dell'arco AC. Perciò il punto A viene spinto in alto da una forza eguale al peso aAAb, che caricherebbe l'arco aA, che unitamente coll'acuto ACH forma un quadrante. In riguardo al punto C, la sua forza orizzontale s'uguaglia a quella de' punti a, A, e la sua forza verticale al peso aACDAb, che comprime l'arco AC, e il compimento aA al quadrante dell'arco ACH. Dalle cose or ora dimostrate agevolmente si deduce, che alle due equazioni $\dfrac{(la)^3.(ab)}{(ML)^3} = CD$ del Problema V.; $\dfrac{(LA)^3.AB}{(ML)^3} = CD$ del Problema XIII. corrisponde la stessa curva bBDN. In fatti se così è, la linea CD in entrambe deve avere lo stesso valore, e conseguentemente essere $(la)^3.ab = (LA)^3.AB$, o sia $\dfrac{(a^2+f^2)^3}{8f^3}.\dfrac{4ba^3f^3}{(a^2+f^2)^3} = ba^3$, il che si verifica puntualmente.

Problema XIV.

Determinare la larghezza della pila, che formi equilibrio con uno de' nostri archi acuti.

Conciossiachè o appartenga il punto C o all'arco acuto AC, o al circolare aAC, è sollecitato dalla stesse forza spingente, e premente, purchè il peso sovrapposto finisca nella medesima curva

bADN

b B D N determinata nei Problemi V. e XIII., gli archi nominati richiederanno la stessa spalla $GH = q$ (Fig. 12.), quando sia pari l'altezza $GC = c$ della pila. La formola dunque del Problema VI. serve ancora pel caso presente.

Che se abbiamo in animo di introdurre nella equazione i simboli del Problema XIII. scopriremo, appoggiandoci a quanto si è dimostrato nel Problema II. $\frac{4bc^3f^2}{(a^2+f^2)^2}\cdot c - \frac{2ba^3f^2\cdot(a^2-f^2+2fy)\cdot q}{(a^2+f^2)^2\cdot\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)}}$ $= ([illegible] \frac{+ [illegible] a^3 f^2}{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy - f^2y^2)^{\frac{3}{2}}}) \cdot \frac{q^2}{2}$. Per abbreviare il calcolo, metto $\sqrt{(a^2f^2+(f^2-a^2)\cdot fy-f^2y^2)} = v = ML$ (Fig. 14.), onde si abbia $a^2-f^2+2fy = \sqrt{((a^2+f^2)^2-4f^2v^2)}$, e trovo $\frac{4bc\,a^3f^2}{(a^2+f^2)^2} - \frac{2ba^3f\sqrt{((a^2+f^2)^2-4f^2v^2)}\cdot q}{(a^2+f^2)^2\cdot v} =$ $(\frac{cv^3+ba^3}{v^3})\cdot\frac{q^2}{2}$, e dopo i necessarj calcoli

$$\sqrt{\left(\frac{4bc\,a^3v^3}{(a^2+f^2)^2\cdot(cv^3+ba^3)} + \frac{4b^2a^6f^2\cdot((a^2+f^2)^2-4f^2v^2)}{(a^2+f^2)^4\cdot(cv^3+ba^3)^2}\right)} - \frac{2ba^3f v^2\cdot\sqrt{((a^2+f^2)^2-4f^2v^2)}}{(a^2+f^2)^2\cdot(cv^3+ba^3)}$$
$= q$.

Corollario I.

Posta $NL = v = AL = a$ (Fig. 14); nel qual caso $MC = y$ diviene infinitamente piccola, troveremo

$$\sqrt{\left(\frac{4bc\,a^3f^2}{(a^2+f^2)^2\cdot(c+b)} + \frac{4b^2a^4f^2\cdot(a^2-f^2)^2}{(a^2+f^2)^4\cdot(c+b)^2}\right)} - \frac{2ba^2f\cdot(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2\cdot(c+b)} = q$$, e questa è la spalla più larga, che possa competere agli archi, di cui parliamo.

Corollario II.

Ma nella circostanza di $ML = v = 0$, in cui $y = MC = LH$ $= f$, ne risulta $q = 0$: nè io sto a ripetere quello che ho detto in altri incontri sopra questa conseguenza, la quale è vera solamente in riguardo allo sfiancamento.

Problema XV.

Determinare la forza sfiancante, e premente, che sostiene qualsivoglia punto di un arco acuto, quando la muraglia sovrapposta è terminata da una linea orizzontale.

L'arco di sesto acuto ACH (Fig. 15.) sostenti il peso ACHNA, che nella parte più alta si adatta all'orizzontale AN, e si cerchi la forza sfiancante, e premente, che sostiene qualunque punto C.

Nel

Nel precedente Problema XIII. ho scoperto lo sforzo, che soffre il punto A per la direzione della tangente TA, eguale a $\frac{2ba^2f}{a^2+f^2}$. Sia dunque AT $= \frac{2ba^2f}{a^2+f^2}$, e pel punto T passi la verticale RQ, che tagli l'orizzontale AR nel punto R. Ho notato nello Scolio I. dopo il citato Problema, che la forza TA si risolve nelle due RA $= \frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$ orizzontale, TR $= \frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$ verticale. Queste due forze non dipendono dal peso ACDA (Fig. 14.), che va crescendo coll'altezza; imperciocchè rimangono le stesse, anche quando il punto C infinitamente prossimo al punto A si appoggia alla pila, nel qual incontro il peso ACDA ha il medesimo valore $= by$, come se la linea ADN fosse retta, ed orizzontale. Taglio (Fig. 15.) l'arco minimo AS, e tirata la verticale SF, segno TO = ASFB $= p$. Essendo il punto A spinto dalla forza TA, egli è necessario che il peso TO si risolva nelle due forze TA, AO, la prima delle quali si adopera contro il punto A, e la seconda contro il punto S.; ma una tal forza si compone dalla spingente AR $= \frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$, e dalla premente RO = RT + TO $= \frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2} + p$; dunque la forza spingente del punto S è costante, ed uguale a quella del punto A, e la forza premente pari a quella del punto A coll'aggiunta del peso TO = ASFB $= p$. Se il punto S non ha da far moto, devrà esser contrappremuto dalla forza OA, e ciò posto, tagliato un secondo arco infinitesimo SK, e fatta OP = SKGF, il peso OP dee risolversi nelle due forze OA, AP, l'ultima delle quali spinge il punto K, e si risolve nella solita spingente AR, e nella premente RT + TP $= \frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2} + p$. Seguitando a battere la stessa strada, dimostrerò le forze spingente, e premente di qualsivoglia punto C uguali, l'una alla costante $\frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2}$, l'altra all'aggregato della costante $\frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$, e del peso ACDB $= p$: il che &c.

Problema XVI.

Determinare la larghezza della pila atta a resistere allo spingimento di un arco acuto, che sostenga una muraglia terminata da una linea orizzontale.

Usata

Usata le consuete denominazioni, avremo conforme a ciò, che si è dimostrato nel Problema II. $\frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2} : c\left(-\frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2} - by - \int x dy\right) \cdot q = (c+x+b)\cdot \frac{q^2}{2}$, ed effettuati i necessarj computi, ponendo per maggior facilità $\frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2} = m^2$, $\frac{2ba^2f.(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2} = n^2$, avremo $\sqrt{\left(\frac{2m^2c}{c+x+b} + \frac{(n^2+by+\int xdy)^2}{(c+x+b)^2}\right)} - \frac{n^2-by-\int xdy}{c+x+b} = q$

Scolio I.

Per far uso della nostra formola, egli è d'uopo ridurre a computo $\int xdy$. E primieramente se il punto H (Fig. 16) si appoggia alla pila, si osservi, che nel triangolo fLA, in cui sono noti tutti i lati, la Trigonometria c'insegna a trovare l'angolo AfH, e conseguentemente l'arco AH, ed il settore fAH, dal quale sottratta l'aja fLA, si rende cognita l'aja LACH. Si levi questa dal rettangolo LHNA, e scopriremo il valore cercato dell'aja ACHNA $= by + \int xdy = p$.

Ma se la pila si sottopone al punto C, è da notarsi, che nel triangolo fZC sendo conosciuti tutti i lati, la Trigonometria ci manifesta l'angolo CfH, da cui si deduce il valore dell'arco CH, e del settore fCH. Nel triangolo fLV, di cui sono noti i tre angoli, ed il lato fL, si renderà parimente noto il lato LV, e l'aja $\frac{fL.LV}{2}$, la quale sottratta dal settore fCH, ci palesa l'aja LVCH. Si aggiunga a questa il triangolo divenuto cognito VMC, onde si formi l'aja LMCH, la quale si levi dall'aja LACH, e resterà data la grandezza dell'aja MAC. Finalmente una tal aja si sottri dal rettangolo MCDB, e rimarrà la superficie ACDB $= by + \int xdy = p$: il che &c.

Scolio II.

A cagione di paragonare i nostri archi di sesto acuto cogli ellittici, discendo dal generale al particolare, e suppongo la pila sottoposta al punto H, ed fAH un triangolo equilatero inscritto nell'arco acuto. In tale circostanza avremo $a = f\sqrt{3}$, ed $fH = 2f$. L'angolo AfH si eguaglia a $\frac{2}{3}$ di retto, e perciò l'arco ACH pareggia $\frac{2}{3}$ del quadrante: ma supposta la regola di Archimede è il quadrante $= \frac{11}{7}.2f = \frac{22}{7}f$; dunque ACH $= \frac{44}{21}f$, ed il settore fAH $= \frac{44}{21}f^2$. Sottro da questo il triangolo fLA $= \frac{f^2\sqrt{3}}{2}$, e resta LACH $= \frac{44}{21}f^2 - \frac{f^2\sqrt{3}}{2}$, e tolta essa superficie dal rettangolo LHNA $= (f\sqrt{3}+b).f$

=

$= f^2\sqrt{3} + bf$, rimane $ACHNB = \frac{3f^2\sqrt{3}}{2} + bf - \frac{44f^2}{21} = by + \int x\,dy = p$. Abbiamo inoltre nella ipotesi presente $m^2 = \frac{4ba^3f^2}{(a^2+f^2)^2} = \frac{3}{4}bf\sqrt{3}$, $n^2 = \frac{2ba^2f\cdot(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2} = \frac{3}{4}bf$, e quindi la formola generale si riduce alla seguente $\sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}bcf\sqrt{3}}{c+f\sqrt{3}+b} + \frac{(\frac{3}{4}bf + \frac{3}{2}f^2\sqrt{3} - \frac{44}{21}f^2)^2}{(c+f\sqrt{3}+b)^2}\right)} - \frac{\frac{3}{4}bf - \frac{3}{2}f^2\sqrt{3} + \frac{44}{21}f^2}{c+f\sqrt{3}+b}$ $= q$. Si rifletta essere prossimamente $\sqrt{3} = \frac{97}{56}$, e supponendo $b = f$, $c = 2f$; si troverà effettuato un non breve calcolo, e trascurata qualche picciola frazione, $f\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{13\frac{1}{2}}{1590}\right) = q$, cioè a dire la larghezza della pila eguale a un di presso alla terza parte della larghezza $2f$ dell'arco acuto, dato che sia $a = f\sqrt{3}$, $b = f$, $c = 2f$.

Andiamo ora in traccia della spalla q in un arco ellittico, in cui alle costanti a, b, c si assegnino i descritti valori. La formola del Corollario I. del Problema XII. prenderà il sottoposto aspetto $f\left(\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{3})} + \frac{(1+\frac{3}{14}\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})^2}\right)}\right) - f\cdot\frac{(1+\frac{3}{14}\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = q$, o sia ammettendo l'approssimazione di $\sqrt{3} = \frac{97}{56}$, $q = f\cdot\frac{(\sqrt{(120505)} - 131)}{459}$ $= f\cdot\frac{(214 + \frac{46}{347})}{459} = f\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{15 - \frac{125\frac{1}{2}}{347}}{459}\right)$, cioè la larghezza della pila un po minore della quarta parte della larghezza dell'arco ellittico, in cui sia $a = f\sqrt{3}$, $b = f$, $c = 2f$.

Corollario.

Con ragione gli archi di sesto acuto sono stati quasi totalmente esiliati dall'Architettura, richiedendo più spalla degli archi ellittici analoghi, ed essendo mal equilibrati nella loro sommità, che viene spinta all'insù dalla forza $\frac{4ba^2f\cdot(a^2-f^2)}{(a^2+f^2)^2}$, come ho avvertito nello Scolio I. dopo il Problema XIII. la qual forza gli scompaginerebbe, se la sua azione non venisse impedita dalla tegnenza della materia, e dai fregamenti.

Scolio III

Non deggio tralasciar di notare, che riuscirebbe opportuno l'uso degli archi acuti, quando ricercassero la circostanza di applicare al punto A un peso eguale alla doppia aja (Fig. 14.) $aAbb$, il quale facesse equilibrio colla forza, che spinge all'insù il punto A. Impedisca di continuare la fondamenta d'un portico,

o di una loggia costrutti con archi, o con intercolunnj un fondo pa=
lustre, sopra cui debba fabbricarsi un arco, a piombo della sommi=
tà del quale cada un pilastro, o una colonna del portico, o della
loggia, ed in tal congiuntura si adatterà con profitto all'arco la
figura di acuto. Abbenchè non dissimulo, che la maggior per=
fezione richiederebbe di formar l'arco con due porzioni CGH
(Fig. 9.) di quella curva equilibrata da me determinata nel
Problema III. collocandole una a destra, l'altra a sinistra in mo=
do tale, che componessero una specie d'arco acuto. Il punto C
sarebbe spinto in alto da una forza eguale alla doppia superficie
ACDB, e quando esso si comprimesse con pari peso, starebbe
ogni punto dell'arco in un perfetto equilibrio.

Che se la colonna, o il pilastro non dividesse ugualmente
la larghezza dell'arco sottoposto, farebbe di mestieri comporlo
con due archi inaguali di cerchio HA, cA (Fig. 14.), alzando la
pila, che sostenta il punto c, più di quella, che sostenta il punto
H, per la misura zc, ed operando in maniera, che il peso del
pilastro, o della colonna stessa sopra il punto A, il quale verreb=
be spinto all'insù da una forza eguale alla doppia aja aAAb.
E meglio ancora si costruirebbe l'arco, di cui parliamo, con due
parti disaguali CH, CG (Fig. 9) presa dalla curva de Problema III.
ed il suo vertice C verrebbe spinto all'insù come uno sforzo pari
alla superficie duplicata ACDA.

Fermandomi in questa curva, ch'è l'ottima, quando la mu=
raglia sovrapposta è terminata da una linea orizzontale, si
potrebbe comporre l'arco con tre porzioni della stessa congiun=
gendo i punti C, G (Fig. 9.), ed il medesimo facendo nell'altro
vano, quando due pilastri, o due colonne fossero piantate sopra
il vano dell'arco. Posto che dai due pilastri, o dalle due colonne
il vano dell'arco fosse regolarmente compartito, i pezzi di curva
AC, GH dovrebbero prendersi rispettivamente uguali di parte
e d'altra, omettendo due uguali porzioni di curva CG. Se il detto
compartimento fosse irregolare, avrebbero ad assumersi inaguali
i due segmenti di curva GH, e far sì, che sopra i due punti C ca=
dessero i due pilastri, o le due colonne. Il punto G sarebbe stimolato

all'

alli dalla forza AGEB, ed il punto C stimolato all'ingiù dalla forza ACDB; e quindi la spinta all'insù dai due punti G, C congiunti in uno s'uguaglia alla superficie CGED, che deve stabilirsi eguale alla porzione del peso della loggia portata dal punto D.

Annotazione alla Dissertazione della Figura, e dello Sfiancamento degli Archi.

La curva AMC (Fig. 12.) uniformemente pesante, i cui elementi siano mutuamente equilibrati, da me determinata nel Problema I. necessariamente richiede, che la verticale KI indicante il peso di essa curva, prolungata che sia, passi pel centro T di gravità della curva medesima, ed egli è d'uopo provare ch'effettivamente ci passa.

Dal punto A si meni la verticale AAL, e si prolunghi la orizzontale FC sino in B. Ritenute l'altre denominazioni, pongo AI = q. La sottotangente AL si eguaglia ad $\frac{ydx}{dy}$, e quindi $AL = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. Ora essendo

$FG : CF :: AL : AI$, troveremo $AI =$
$dx : dy :: \frac{ydx - xdy}{dy} : \frac{ydx - xdy}{dx}$

$q = y - \frac{xdy}{dx}$, e sostituendo in cambio di y, e di dy i loro valori $l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$, $\frac{adx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$ determinati nel Problema I., ne risulterà ~~$q = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$, e differenziando~~ $q = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}) - \frac{ax}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, e differenziando

$dq = \frac{(a^2+ax).dx}{(2a+x)\sqrt{(2ax+x^2)}}$

Sia T il centro di gravità della curva AMC = s (Fig. 16.) Il punto O, che divide per metà la flussione CG = ds, sarà il centro di gravità della detta flussione. Condotta la retta TO, in essa dev'essere collocato il centro t di gravità della curva AMCG. Si tirino le verticali ti, CD, OP. Egli è noto doversi avverare l'analogia AMC = s : CG = ds :: Ot : Tt : ma Ot : Tt :: Pi : Ii, e Pi = DI = AD − AI = $y - q$, Ii = dq; dunque $s : ds :: y-q : dq$, e per conseguenza $y - q = \frac{sdq}{ds}$, ovvero $y - \frac{sdq}{ds} = q$. Nel Problema I ho scoperto $y = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)})$, $s = \sqrt{(2ax+x^2)}$, $ds = \frac{adx+xdx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, e perciò $\frac{s}{ds} = \frac{2ax+x^2}{adx+xdx}$, e poco fa ho trovato

$dq = \frac{(a^2+ax).dx}{(2a+x)\sqrt{(2ax+x^2)}}$. Surrogati questi valori, ci si presenterà

q.

$$q = l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}) \left(\frac{2ax-x^2}{adx+xdx}\right) \cdot \frac{(a^2+ax) \cdot dx}{(2a+x)\sqrt{(2ax+x^2)}} =$$

$$l(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}) - \frac{ax}{\sqrt{(2ax+x^2)}}.$$

Per la qual cosa AI = q ha lo stesso valore o si deduca dalla sola equazione della curva AMC, o dalla supposizione, che il centro di gravità d'essa curva uniformemente pesante sia collocato nella verticale KIT, e per conseguenza si avvera la detta supposizione. Il centro dunque di gravità della curva AMC = s è situato nella verticale KIT, e potendosi concepire il peso = s applicato in I, qualunque arco di figura catenaria sarà sempre equilibrato.

Questo stesso equilibrio si può dimostrare col metodo delle azioni. Ho provato nel citato Problema I. = a la forza orizzontale, che spinge per la direzione IA (Fig. 14.) Segnata IN = a, si tiri la verticale NO, e si prolunghi IL sino in O. Avendo fatto vedere, che le forze per NI, KI, CI sono proporzionali a CF = dy, FG = dx, CG = ds, egli è facile da scoprire, che le premmentovate forze s'eguaglieranno ad NI, ON, IO, a cui si faccia eguale PI.

Se non ci fossero gl'impedimenti in A, C, la curva pesante AMC discenderebbe in tempo minimo parallela a se stessa per la verticale IR, ed eserciterebbe l'azione KI.IR = ON.IR. Una pari azione tenta di esercitare la forza KI = s, che si può supporre applicata in I. Si tiri la linea PR, e fatto centro in P, si descriva l'archetto RQ. Non altrimenti condotta la retta NR, col centro N, e raggio NI si delinei l'archetto IS. Supposti i suddetti impedimenti, e l'azione KI.IR, ne nascerebbe la reazione PI.IQ dalla forza PI, e l'azione NI.SR dalla forza NI. Quest'ultima azione può trascurarsi; perchè SR è infinitesima del secondo ordine. Egli è d'uopo dunque, che sia KI.IR = PI.IQ, acciocchè un'azione impedendo l'altra, nasca equilibrio, e la curva pesante AMC per conseguenza non faccia moto. E voglia il vero, i triangoli rettangoli NOI, QIR sono simili; perchè sendo parallele le linee NO, RI, s'eguagliano

gli

gli angoli O, RIQ. Avremo pertanto ON = KI : OI = PI :: IQ : IR, e quindi KI.IR = PI.IQ; il che &c.

Credo che quanto ho scritto possa essere sufficiente per far isvanire ogni dubbio, e che resterà persuaso chi legge, che un arco di figura catenaria sia perfettamente equilibrato e tutto intero, ed in qualunque sua parte; perchè condotte ai punti estremi due tangenti, e menata pel loro concorso una verticale, passa questa pel centro di gravità o dell'arco totale, o della parte prescelta.

Bastava al mio intento il provare, che (fig. 14) la verticale KI prorogata passa pel centro T di gravità della curva AMC?. Ora giacchè mi si presenta l'occasione, determino la distanza IT = p dal detto centro dalla retta AD.

Stando, come ho provato, s : ds :: Ot : Tt, e, tirata TN parallela ad AP, Ot : Tt :: NO − Ht = NO : Ht, avremo s : ds : NO : Ht. Se IT = p, ne proviene Ht = dp, ed NO = x − p, e per conseguenza s : ds :: x − p : dp, e passando all'equazione $xds = sdp + pds$, ed integrando $\int xds = sp$, e sostituendo in cambio di s, e di ds i loro valori $\sqrt{(2ax+x^2)}$, $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, $\int\left(\frac{axdx + x^2dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}\right) = p.\sqrt{(2ax+x^2)}$.

Osservo essere $\int\left(\frac{axdx + x^2dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}\right) = \int\left(x . D\sqrt{(2ax+x^2)}\right)$, il che mi apre l'adito alla costruzione.

Col semiasse AD = a descrivo (fig. 19.) l'iperbola equilatera AME. Delineate DF, AG normali a AD, e tagliata DN = $\sqrt{(2ax+x^2)}$, sarà NM = a+x, ed IM = x. L'aja AIM dell'iperbola si agguaglia a $\int(x . D.\sqrt{2ax+x^2}) = \int$ IM. Dif. AI, e quindi avremo $\frac{AIM}{AI} = p$. Nell'integrazione non si è aggiunta costante; perchè ad MI = x = 0 vi corrisponde p = 0. Per evitare gli equivoci suppongo x minima, onde si abbia in tal circostanza $\int\left(\frac{axdx}{\sqrt{(2ax}}\right) = \int(\sqrt{\tfrac{1}{2}a} . x^{\frac{1}{2}}dx) = p.\sqrt{2ax}$. Effettuata l'integrazione, trovo $\sqrt{(\tfrac{1}{2}a) . \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = p.\sqrt{(2ax)}$, e dividendo per $\sqrt{(2ax)}$, $\tfrac{1}{3}x = p$, e perciò ad x = 0 si riferisce p = 0, come doveva dimostrarsi.

L'aja iperbolica BIM si può ridurre a computo col mezzo dei logaritmi. Si conduca l'assintoto DE. Dal punto M si conduca (meni) MH parallela a BG, e segnata HL = HM, si descriva la retta LM, che si continui finchè tagli l'assintoto nel punto K. Si delinei inoltre AO parallela ad LK. La figura dimostra essere LKD = LMH + BHM + BOKM + ADO, e perciò LKD − LMH − BOKM − ADO = BHM = AHMI − AIM, e conseguentemente BHMI + LMH + BOKM + ADO − LKD = BIM. (*)

Sia come sopra AD = a, e quindi OD = OB = $\frac{a}{\sqrt{2}}$, AH = x, HM = HL = $\sqrt{(2ax+x^2)}$, DL = $a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}$, onde ne risulta DK = LK = $\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}$. Si agguaglia l'aja BOKM ad $\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \log\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right)$ nella logaritmica della sotto tangente $\frac{a}{\sqrt{2}}$, e preso $\frac{a}{\sqrt{2}}$ come protonumero; di più abbiamo KM = LK − LM $= \frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)} - \sqrt{2}\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}} = \frac{a+x-\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}$.

Sostituiti i valori analitici nella formola (*), e fatte le dovute riduzioni, ci si presenterà $\left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{(2ax+x^2)} + \frac{a}{\sqrt{2}}\log.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right)$ = BIM. Faremo uso delle Tavole avvertendo, che in due logistiche i logaritmi riferiti allo stesso protonumero stanno come le sottotangenti. La sottotangente della logistica delle Tavole si agguaglia a $b = 0,4342944819$, e perciò indicando per Log. i logaritmi delle Tavole si avrà l'analogia

$\log.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right) : \text{Log}.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right) :: \frac{a}{\sqrt{2}} : b$, che ci somministra l'equazione $\log.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{b\sqrt{2}} \cdot \text{Log}\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}}\right)$

Supponendo le Tavole Log. 1 = 0, facciasi $\frac{a}{\sqrt{2}} : 1 :: \frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{\sqrt{2}} : \frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}$, e si inferisca essere $\log.(a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}) = \frac{a}{b\sqrt{2}} \cdot \text{Log}.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}\right)$. Dalla sostituzione di questo valore ne nasce

$\left(\frac{x-a}{2}\right)\sqrt{(2ax+x^2)} + \frac{a^2}{2b} \cdot \text{Log}.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}\right)$ = BIM.

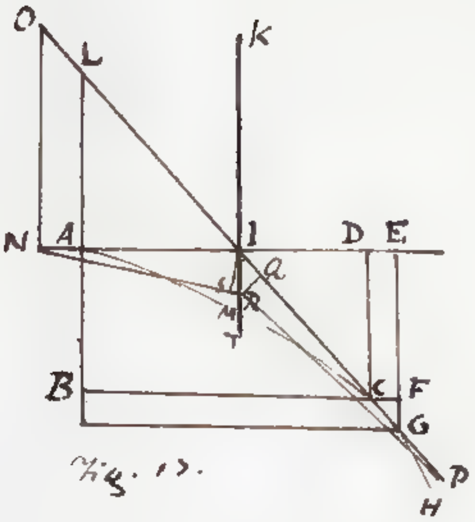


Fig. 17.

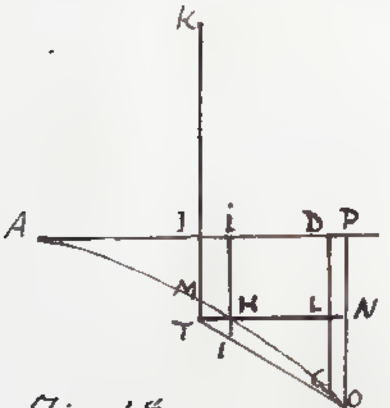


Fig. 18

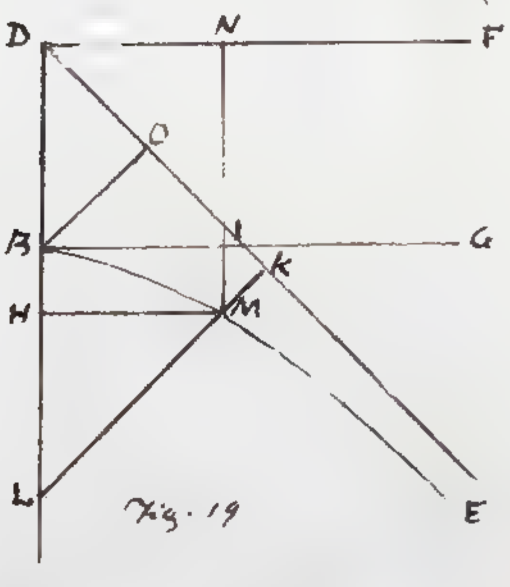


Fig. 19

Esame del Sistema musico di M. Rameau stampato nel Tomo XXI del Giornale di Modena pag. 47. n.° III.

Esame
del Sistema Musico
di
M. Rameau.

Esame del Sistema Musico
di M. Rameau.
Dissertazione Acustico Matematica del Signor Conte
Giordano Riccati.

Il chiarissimo M. Rameau è un Autore originale, che non contento di seguire gli Scrittori a lui precaduti, ha lodevolmente tentato nuove, e pellegrine scoperte nella teorica della Musica. La considerazione del Basso fondamentale, e la maniera, con cui si generano le Scale dei due Modi per Terza maggiore, e per Terza minore meritano distinta menzione. La stessa origine dei due Modi la comunicai l'anno 1735. al P. Francescantonio Vallotti eccellente Maestro di cappella nel tempio di S. Antonio di Padova, che avendomi partecipata la serie degli accompagnamenti, ch'egli assegnava alle corde componenti la Scala del Modo maggiore, mi diede occasione di avanzare l'utilissimo passo. L'Opera Generation Harmonique di M. Rameau, in cui si contiene la medesima scoperta, fu pubblicata in Parigi l'anno 1737. Avendo il Sistema del nostro Autore oltre la Nazione Francese, conquistata l'Inglese, ed in gran parte ancor l'Italiana, giudico che possa riuscir utile l'esaminarlo, acciocchè purgando in esso quello, che v'è di buono, si preservi specialmente la Gioventù dall'accettarlo universalmente.

a nel Cap. I. della sua Opera *Generation Harmonique*, che prende ad esaminare,

Colloca egli (a) il principio dell'armonia nella risonanza dei corpi sonori, che suppone essere in tutti quella stessa, di cui sono fornite le corde di costante grossezza. Questa supposizione non conviene colla verità, dandosi infiniti corpi, la cui risonanza è diversa dalla mentovata testè, cioè a dire da $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ &c. Nel *Prodromo della nuova Enciclopedia Italiana*, che avea divisato di pubblicare il Sig. Ab. Alessandro Zorzi di chiara memoria, il quale è stato stampato in Siena, si contiene un mio Articolo, che tratta del *Suono falso*, e con tal occasione *delle Vibrazioni delle corde di ineguale grossezza regolata da una legge costante*. Dimostro in esso, che due specie di corde hanno una risonanza sommamente varia da quella delle corde cilindriche. Assegnato ad una costante un determinato valore, ho scoperto che una di queste specie sarebbe dotata della risonanza $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{37}}$ &c. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ totalmente discrepante dalla sovrascritta spettante alle corde di data grossezza. In un'altra Dissertazione inedita *Delle Vibrazioni sonore dei Cilindri* provo, che questi corpi, ~~dei~~ coi quali si formano degli stromenti grati all'udito, hanno una compostissima risonanza. Il secondo suono per esempio si riferisce al primo in Quarta ~~superflua~~ maggiore sopra le

Ottava

~~il cui numero è~~ dalla ragione $\frac{25}{9}$
Ottava ~~$\frac{9}{125}$~~ calante per qualche cosa più di mezzo Comma.

La risonanza dunque dei corpi sonori non è il principio dell'armonia. Nè vale la ritirata, che fra le varie risonanze fa d'uopo scegliere la più semplice, ~~che quella~~ propria della corda di costante grossezza; imperciocchè anche questa è dissonante: e sebbene i suoni ~~$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$~~ delle parti della corda consonanti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ sono i più sensibili, nulladimeno M. Rameau stesso confessa che si ode ancora il suono ~~della corda~~ della parte $\frac{1}{7}$, che certamente riesce dissonante all'orecchio. Oltre di che nell'Opera Della Corda, ovvero Fibre elastiche alla pag. 29, 40 insegno un artifizio per separare dal suono della corda totale quelli delle sue parti aliquote, mediante il quale si odono quanto basta distinti fino i suoni delle parti ventesime. Per la qual cosa non può nemmeno ammettersi come principio dell'armonia consonante la risonanza della corda grossa uniformemente.

Fa di mestieri pertanto ricorrere a varj principj, cioè ~~primieramente al principio sperimentale~~, qualmente l'esperienza c'insegna, che le ragioni consonanti ridotte a numeri fra loro primi non debbono contenere alcun numero impari maggiore del cinque; che paragonati a due a due in tutte le possibili combinazioni i suoni d'un accompagnamento consonante, hanno da riferirsi in ragioni consonanti; che sarà compiuto quell'accompagnamento consonante, che viene cangiato in dissonante dall'aggiunta di qualsivoglia

suono

suono non eguaiscono ai già introdotti; e che finalmente dovrà riputarsi fondamentale quell'accordo consonante, in cui il miglior aggregato di consonanze si riferisce al Basso, col quale si fanno i principali paragoni; perchè le sue vibrazioni più durevoli contengono in se stesse le meno durevoli dei suoni acuti. Che se la durata d'una vibrazione del Basso sarà multipla di quelle dei suoni acuti, competerà allo stesso il titolo di perfettamente fondamentale.

La serie $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}$ indica l'accordo consonante, che suole chiamarsi per Terza maggiore, il qual è fondamentale non solo per il motivo, che l'aggregato delle consonanze corrispondenti al Basso è migliore di quelli, che si riferiscono ai suoni acuti, ma molto più perchè lo stesso è ottimo, ed il Basso è perfettamente fondamentale ~~siccome quello, ch'è multiplo dei suoni acuti~~ × essendo la durata di una sua vibrazione multipla di quella dei suoni acuti.

L'accordo per Terza minore è anch'esso fondamentale, perchè l'aggregato delle consonanze relativo al Basso è più perfetto di quelli, che corrispondono ai suoni acuti; benchè per altro non sia ottimo, e la durata di una vibrazione del Basso non sia multipla di quella dei suoni acuti, come patentemente apparisce dalla progressione $1,\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ dinotante il predetto accordo.

Il nostro chiarissimo Autore da un'altra fonte deriva l'origine dell'accompagnamento per Terza minore.

Siccome

Siccome insieme colla corda intera oscillano le sue parti aliquote, o sue summultiplici, così ingannato da una apparenza equivoca, pensa che ancora le corde multiplici concepiscano vibrazione, onde allo oscillare della corda 1, si vibrino parimente le corde ~~2, 4, 6~~, 5, 3 e ne nasca l'accompagnamento ~~#~~ A^6 7 C, supposto che C sia il fondamento dell'accordo per Terza maggiore 1, $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$: Incitata al suono la corda 1, le corde ~~2~~, 5, 3 oscillano divise in parti uguali all'unità. Quantunque ciò venga affermato da M. Rameau, nulladimeno sostiene, che si vibrano ancora nella loro totalità ; perchè accostata l'unghia di un dito al punto collocato fra due unità, le corde fremono. Fatta la riflessione, perchè l'unghia tocca la corda in più punti situati a destra, e a sinistra di quello, che separa due unità, e che i predetti punti si vibrano ; egli è chiaro, che la corda deve fremere, ~~quan~~ benchè non oscilli intera. Ella è legge costante, che non si comunicano sensibilmente, salvochè i suoni unisoni ; ed intanto la corda 1 fa che si vibrino le corde $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. in quanto che col suono della corda 1 sono incorporati i suoni delle sue parti aliquote $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. , i quali alla corda essendo uguali, ed unisoni vengono comunicati. Non vibrandosi adunque nella loro totalità le corde ~~2~~, 5, 3 ; per la ragione della

dalla corda 1, svanisca la supposta origine dell'accordo per Terza minore.

Ma prescindendo anche da ciò, e messo parimente da parte, che se la risonanza delle corde submultiplici, e multiplici fossero ugualmente sensibili, il loro aggregato riuscirebbe assai dissonante; apparisce chiara la falsità del Sistema del nostro Autore; perché supposto (C^{5}_{3}) l'accompagnamento per Terza maggiore, lo guida all'accordo F^{5}_{3b} per Terza minore, piuttostoché al veramente relativo A^{5}_{3}. Questa sola ripugnante conseguenza basta per gittar a terra il principio della risonanza, quantunque ristretta alle sole corde submultiplici, e multiplici.

Dalla predetta doppia risonanza 15, 5, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ... si può dedurre quel Sistema 3, 1, $\frac{1}{3}$, che il Sig. Giuseppe Tartini appellava della Cadenza, e che io nomino Sistema di Melodia. Vien esso composto dalla corda principale 1, dalla Quinta superiore $\frac{1}{3}$, e dalla Quinta inferiore 3 equivalente alla Quarta superiore. Queste tre corde sono chiamate da M. Rameau Tonica, Dominante, e Sottodominante. La Musica è una mescolanza di armonia, e di melodia, ch'è quanto a dire una successione di armonici accompagnamenti. Fatto sentire l'accompagnamento della prima corda 1, e per passare ad un

altro

altro accordo, nulla giovando l'Ottava superiore, o inferiore, ed essendo la Quinta la più perfetta consonanza dopo l'Ottava; egli è chiaro, che i migliori passi, ch'io posso movere, si effettueranno o ascendendo, o discendendo per una Quinta, onde ne risulti il sovrascritto Sistema di melodia $3, 1, \frac{1}{3}$. Se alle sue tre corde si applicherà l'accompagnamento o per Terza maggiore, o per Terza minore, ne nasceranno i due Modi maggiore, e minore, il secondo dei quali avrà la Scala comune col primo, quando ~~sia~~ su la sua sesta corda si fondi. Quindi il Tuono maggiore C, ed il minore A accetteranno la stessa Scala, e l'uno all'altro saran relativi. Discordano ~~queste~~ la Scala relativa ~~corde~~ per un solo Comma $\frac{80}{81}$ nel valore della corda seconda del primo Modo, questa del secondo, e per scompartire un tal divario è stato necessario il ricorrere al Temperamento.

*Afferma M. Rameau nel Cap. XII, che non vi ha salvochè due Modi il maggiore, e il minore, il che è innegabile, quando s'intenda di parlare di Modi principali; su i quali si possa fondare una musica composizione. Il Modo maggiore è a ciò idoneo assolutamente, ed il minore ha bisogno del soccorso delle corde artifiziali, e specialmente della settima, il cui suono cresce sopra quello della naturale per un minor Semituono. Il Sistema di melodia si chiama meritamente dal Sig.

* Nel Cap. VII. parla il nostro Autore dell'origine del Temperamento, della sua teorica, della sua pratica. Io ho trattato non brevemente di questa materia nel Saggio sopra le Leggi del Contrappunto con un metodo, che tende immediatamente al fine, e che secondo il mio parere è dimostrativo. Dopo aver egli fatta la riflessione, che la successione per Quinta tiene in Musica il primo luogo, e che la Quinta è più perfetta della Terza, e della Sesta, abbraccia finalmente quel Temperamento, che divide l'Ottava in dodici Semituoni eguali, cala tutta la Quinta per $\frac{1}{11}$ del Comma $\frac{80}{81}$, le Terze minori per $\frac{8}{11}$, e per $\frac{7}{11}$ cresce le Terze maggiori. Ho stabilito nel Saggio che se le alterazioni di due consonanze una perfetta, e l'altra imperfetta deggiono

52

Saggiono fare ugual impressione nelli orecchio, hanno da riferirsi in ragione di 3 : 5 ; e quindi nel mentovato Temperamento sono troppo scordate le Terze minori, e maggiori. In fatti non c'è Pratico, che se ne serva, ma condotto dall'orecchio, ad esso sostituisca un Temperamento ineguale, che regola le accordatura dei tasti bianchi sì fattamente che lo scemo delle Quinte, e l'aumentazione delle Terze maggiori faccia nel senso un effetto eguale. Cinque Quinte, in cui hanno luogo uno, o due tasti neri, si scemano per $\frac{1}{11}$ di Comma secondo il Sistema di 12 Semituoni uguali. In sì fatta guisa la Quinta G# D# ovvero Ab Eb si determina crescente per $\frac{3}{7}$ di Comma. I Tuoni maggiori, e minori dei nostri stromenti ricevono un diverso carattere da questo ineguale Temperamento, il quale molto giova alla varietà della Musica, e specialmente ad imitare il senso delle parole, e colla imitazione a risvegliare negli animo i varj affetti.

Sig. Tartini Sistema delle Cadenze, perchè da esse si cavano le quattro Cadenze al Modo spettanti, colle quali si può terminare la cantilena, o un qualche suo passo. Finiscono le Cadenze o nella prima corda, o nella quinta, che ha la strettissima relazione alla prima. La perfetta prima Cadenza si trasferisce dalla quinta corda alla prima, o sia dalla corda Dominante alla Tonica. La seconda Cadenza, fa transito dalla quarta corda alla prima, o sia dalla Sottodominante alla Tonica. Passano le altre due Cadenze, che sono ommesse da M. Rameau, dalla prima alla quinta corda, dalla quarta alla quinta, o usando i termini del lodato Autore ~~M. Rameau~~ dalla corda Tonica alla Dominante, dalla Sottodominante alla Dominante. Quel Semituono, con cui nel Modo maggiore si ascende dalla settima corda all'ottava, ovvero si discende dall'ottava corda alla settima, è molto notato dall'orecchio nelle Cadenze G^{5}_{3} C^{5}_{3}, ~~[illegible]~~ C^{5}_{3} G^{5}_{3}, D^{5}_{3} G^{5}_{3} ; e quindi le Cadenze del Modo minore non l'appagano, quando un simile Semituono non si introduca mediante la settima corda ~~crescente sopra la naturale per un minor Semituono,~~ artificiale, il che si vede effettuato nelle seguenti Cadenze del Tuono A per Terza minore $E^{5}_{3\#}$ A^{5}_{3}, A^{5}_{3} $E^{5}_{3\#}$, D^{5}_{3} $E^{5}_{3\#}$. Alla settima corda naturale del Modo maggiore, artificiale del Modo minore dà il nostro Autore con ragione il titolo di nota sensibile. Accettata la settima corda artificiale nel Modo minore, fa di uopo parimente ammettere

le

la sesta artifiziale, il cui suono sia anch'essa aumentata per un Semituono minore in quegli incontri, nei quali occorre di schivare il passo di Seconda superflua dalla sesta corda naturale alla settima artifiziale, o al contrario, per esempio F♮ G♯, ovvero G♯ F♮ nel Tuono A per Terza minore.

Potendosi dall'accordo della quarta corda far transito o a quello della prima, o a quel della quinta, ed essendo il primo passo più perfetto del secondo; quindi ne nasce, che la Cadenza dalla quarta alla quinta corda non molto appaga l'orecchio. Per rendervela più concludente, è stata introdotta in Musica la quarta corda artifiziale, il cui suono che per un minor Semituono, o Diesis eccede la quello della naturale e Reso, aumentato con questo accrescimento il transito dalla quarta corda artifiziale alla prima, diviene in qualche modo necessario il movimento dalla quarta corda artifiziale alla quinta, e ne resta più contento l'uditore. Con ciò si insinua nel Modo maggiore (io mi servirò sempre dell'esempio del Tuono C) l'accordo F♯ $\frac{3}{5}$ di Terza minore e Quinta ~~diminuita~~ minore, che come consonante si adopra. Le due corde settima e undecima, seconda e sesta della Scala dei due Modi relativi maggiore, e minore si corrispondono nella Quinta ~~diminuita~~ minore B F esprressa dalla ragione 1 : $\frac{45}{64}$, e composta di due Terze minori, una giusta $\frac{5}{6}$, e l'altra $\frac{27}{32}$ calante d'un Comma. Se la Quinta diminuita fosse formata da due Terze

minori

minori esatte, accetterebbe la ragione $\frac{25}{36}$. Ora fra le due composte proporzioni $\frac{45}{64}$, $\frac{25}{36}$ sta di mezzo la più semplice di entrambe $\frac{7}{10}$, che ammettendo in se stessa il numero 7 primo fra gli impari, che si incontra dopo il numero consonante 5, riesce assai ruvida all'udito. Siccome il Tuono minore $\frac{9}{10}$ consta dei due Semituoni $\frac{15}{16}$, $\frac{24}{25}$, così il Tuono maggiore $\frac{8}{9}$ si compone dei due Semituoni $\frac{14}{15}$, $\frac{20}{21}$. Essendo maggiore il Tuono fra F $\frac{3}{4}$ G $\frac{2}{3}$, si moltiplichi $\frac{3}{4}$ per $\frac{20}{21}$, e ne nascerà F♯ $\frac{5}{7}$, che a C $\frac{1}{2}$ corrisponderà nella ragione $\frac{7}{10}$ propria della Quinta diminuita F♯ C. La corda quarta artificiale D♯ apre l'adito nel Tuono per Terza minore A, modello di tutti gli altri Tuoni simili, all'accompagnamento D♯ $\overset{5}{3}$ di Terza diminuita e Quinta ambo diminuite. Alla Terza diminuita D♯ F compete la ragione $\frac{7}{8}$, la quale moltiplicata per la ragione $\frac{4}{5}$ propria della Terza maggiore F A, determina la ragione $\frac{7}{10}$, che ho provato appartenere alla Quinta minore diminuita D♯ A.

La Cadenza D^5 A^5 del Modo minore dalla quarta alla prima corda si renderà conchiudente così D^5 A $\overset{5}{3\sharp}$, accrescendo per un Diesis il suono della terza corda; onde come nella Cadenza analoga di F 3^5 C 3^5 del Modo maggiore si discende per un Semituono dalla quarta

quarta corda alla Terza maggiore della prima corda. Non si usa questa Cadenza sennonchè nelle conchiusioni finali delle composizioni ecclesiastiche.

Egli è di uopo pertanto riflettere, che nei Modi maggiore, o minore non si adoprano soltanto quegli accompagnamenti, da cui traggon l'origine, o naturali, o modificati dalle corde artificiali, ma in essi Modi se ne ricavano parimente dagli altri, della introduzione dei quali è necessario il rendere ragione - Dipende questa da ciò, che oltre i due Modi principali maggiore, e minore, la Scala ad entrambi comune, quando son relativi, ne contiene altri cinque, che servono ai prodotti, e chi li nomina derivati; perchè la mentovata Scala determina i loro Sistemi di melodia forniti dai competenti accordi di Terza, e Quinta [illegible]

Sistemi di Melodia, e di Armonia dei Tuoni derivati D, E, F, G, B.

$D^{5}_{3}\,G^{5}_{3}\,A^{5}_{3}$, $E^{5}_{3}\,A^{5}_{3}\,B^{5}_{3}$, $F^{5}_{3}\,B^{5}_{3}\,C^{5}_{3}$, $G^{5}_{3}\,C^{5}_{3}\,D^{5}_{3}$, $B^{5}_{3}\,E^{5}_{3}\,F^{5}_{3}$: Si usano frequentemente nel Contrappunto le due Cadenze $D^{5}_{3}\,G^{5}_{3}$, $B^{5}_{3}\,E^{5}_{3\sharp}$ dalla seconda alla quinta corda dei due Tuoni C maggiore, A minore, le quali propriamente non appartengono ai detti Tuoni; prendendole essi in prestanza dai Tuoni derivati G, E, relativamente a cui si trasferiscono dalla quinta alla prima corda, ed a se stessi adattandole perchè terminano nella quinta corda.

Si introducono in tali Cadenze la quinta relativa quarta corda artificiali per renderle simili alla perfetta del Modo maggiore nel passo di Semituono dalla Terza dell' accompagnamento antecedente alla base del conseguente, onde prendono il seguente aspetto $D^{5}_{3\sharp}\ G^{5}_{3}$, $B^{5\natural}_{3\sharp}\ C^{5}_{3\sharp}$. Con sì fatto mezzo si ricava in Musica l'accordo $B^{5\natural}_{3\sharp}$, il quale benché assai piccante, adoprato a tempo e a luogo colla debita circospezione, produce un ottimo effetto. Essendo le due Cadenze perfette dei Modi maggiore, e minore composte da due accompagnamenti consonanti, si accomunerà questa proprietà alla Cadenza $B^{5}_{3}\ C^{5}_{3\sharp}$ dalla seconda alla quinta corda, sostituendo alla seconda corda naturale B l'artificiale $B^{\flat}$. Ma sconcertandosi con ciò il passo di melodia $B^{\flat}$ C, si usa per evitarlo la nostra Cadenza nella maniera $D^{6\flat}_{3}\ C^{5\natural}_{3\sharp}$ e riesce all'orecchio molto aggradevole.

Le musiche composizioni tutto giorno ci mettono sotto degli occhi altre due Cadenze dalla settima corda all'ottava $B^{5}_{3}\ C^{5}_{3}$; $G\sharp^{5}_{3}\ A^{5}_{3}$ dei Modi maggiore, e minore; ch'essi prendono in prestito dai Modi derivati 7, corrispettivamente ai quali si trasferiscono dalla quarta corda alla quinta. Nella Cadenza del Modo minore si pone in opera la settima corda artificiale $G^{\sharp}$, per imitare la Cadenza del Modo maggiore nella ascesa di Semituono dalla Settima corda all'ottava.

Fa

Ne menziona il nostro Autore nel Cap. XV. ~~della Generazione Armonica~~ della Cadenza rotta $G\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$ $A\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}$, $E\begin{smallmatrix}7\\5\\3\sharp\end{smallmatrix}$ $F\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}$, che nei Modi maggiore, e minore si trasferiscono dalla quinta alla sesta corda. Anche queste frattanto sono loro somministrate dai Modi derivati D, A, in riguardo ai quali passano dalla quarta corda alla quinta. La settima corda artificiale G♯ ottiene l'effetto, che nella Cadenza rotta del Modo minore si monti per un Semitono dalla Terza delli accompagnamenti precedente alla Terza del susseguente, il che naturalmente succede nella Cadenza rotta del Modo maggiore.

Fin qui non ho parlato salvochè di passi fondamentali di Quinta, di Quarta, di Seconda, i quali spettano ad un Modo, perchè si portano dall'una all'altra corda del suo Sistema di melodia. Restano da considerarsi i passaggi fondamentali di Terza all'ingiù, e all'insù, che si trasferiscono dall'uno all'altro dei sette Modi, due principali, e cinque derivati. Nel citato Cap. XV. ragiona M. Rameau della Cadenza interrotta $G\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$ $E\begin{smallmatrix}6\\5\\3\end{smallmatrix}$ spettante al Modo maggiore senz'adattare al Modo minore l'analoga ~~[illegible]~~ $E\begin{smallmatrix}7\\5\\3\sharp\end{smallmatrix}$ $C\begin{smallmatrix}6\\5\sharp\\3\end{smallmatrix}$. Questa ommissione ha fatto sì, ch'egli non conosca l'accordo $C\begin{smallmatrix}5\sharp\\3\end{smallmatrix}$ di Terza maggiore, e Quinta superflua corrispondente alla terza corda del Modo minore, il derivato dal quale $E\begin{smallmatrix}6\\3\sharp\end{smallmatrix}$ di Terza maggiore

e

e Sesta minore si suole usare per lo più in cambio del supposto fondamentale, perchè riferisca al suo Basso due vere consonanze. Veggansi i due passi relativi nei Modi maggiore, e minore ... $G^{5\,6}_{3}$ $A^{5\,6}_{3}$ G^{5}_{3} &c. ... $E^{5\,6}_{3\sharp}$ $F^{5\,6}_{3}$ ... $E^{5}_{3\sharp}$ &c.

Per dire il vero l'insigne Autore Francese è scarso assai nel dedurre le conseguenze dell'origine dei due Modi maggiore, e minore. Non conosce in qualità di Cadenze i passaggi della prima, e della quarta corda dei predetti due Modi alla quinta, benchè in tale figura continuamente si adoprino. E quindi ne segue, che non debba ammettere le quarte corde artificiali $F^{\sharp}$, $D^{\sharp}$ principalmente introdotte, a cagione di rendere più concludenti le Cadenze dalla quarta corda alla quinta, e per conseguenza nemmeno gli accompagnamenti $F^{\sharp\,5}_{3}$, $D^{\sharp\,5}_{3\natural}$ sopra le stesse fondam.li Il primo è familiarissimo nel Contrappunto, ed il secondo frequentemente s'incontra specialmente nella sua derivazione F. A. $D^{\sharp}$., ch'è più perfetto del supposto
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$
accordo fondamentale $D^{\sharp}$ $F^{\natural}$ A.
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$

Non avendo posto avvertenza ai cinque Modi derivati, ha obbliato le Cadenze dalla seconda alla quinta corda D^{5}_{3} G^{5}_{3}, B^{5}_{3} $E^{5}_{3\sharp}$, che da essi dipendono, quantunque assai frequentate, e molto più le loro alterazioni $D^{5}_{3\sharp}$ G^{5}_{3}, $B^{5\natural}_{3\sharp}$ $E^{5}_{3\sharp}$ col mezzo delle quarte corde artificiali. Gli è ignota

altresì

alzasi la seconda corda artificiale B^{b6} del Modo minore, e la Cadenza D^{b6}_{3} $C^{5b}_{3\sharp}$ che in certi incontri adoperata riesce tanto patetica, e sommamente gradita. La stessa sorte hanno incontrato ancora la usitatissima Cadenza B^{5}_{3} C^{5}_{3}, $G\sharp^{5}_{3}$ A^{5}_{3} dalla settima corda all'ottava. Gli sono noti gli accordi A^{5}_{3}, $G\sharp^{5}_{3}$, ma in riguardo al secondo, a cui spesso si aggiunge la Settima diminuita 7, dice alla pag: 163. ~~della Generazione Harmonica~~, Cap. XVIII. Art. 1., che in tutti li casi ove la Nota sensibile porta l'Accordo di Settima diminuita, essa è sempre sostituita alla Dominante tonica, di cui forma la Terza maggiore; di ~~sorte~~ modo che tutto ciò che si pratica in tal caso si dee riferire unicamente a questa Dominante, come se la stessa effettivamente s'impiegasse in luogo della Nota sensibile. Se si sottointendesse la Dominante C, il suono aggiunto 7 corrisponderebbe ad essa in Nona, nè potrebbe usarsi senza preparazione: ma il detto suono non preparato si accoppia all'accompagnamento $G\sharp^{5}_{3}$, come nell'esempio A^{5}_{3} $G\sharp^{5}_{3}$ A^{5}_{3}; dunque non si sottointende la Dominante C, ma l'accordo $G\sharp^{5}_{3}$ si pone in opera come fondamentale. Lo stesso dee dirsi anche dell'accordo B^{5}_{3}, a cui non dee sottointendersi la Dominante G dal Modo maggiore.* Ho già notato, che egli non mai nomina l'accompagnamento $C^{5\sharp}_{3}$ di Terza maggiore, e Quinta superflua, che si può adattare alla terza corda del Modo per Terza minore.

* Nel Trattato dell'Armonia avea asserito nascere l'accordo $7^{4}_{2}\sharp$ dal sostituire nell'accordo $C^{5}_{3\sharp}$ 7 in cambio di C prendendo come in presto la corda 7, tralasciata la base C. Trasportando 7 all'Ottava alta, ci si presenta l'accompagnamento $G\sharp^{5}_{3}$ di Terza minore, Quinta minore e Settima diminuita. Questa falsa idea è stata da lui abbandonata nella Generazione Armonica, accettandone un'altra egualmente falsa.

Afferma M. Rameau nel Cap. V. pag. 51. che le dissonanze altra cosa non sono che i gradi, che servono a passare da una consonanza all'altra. E' differenza la Seconda maggiore $\frac{8}{9}$ chiamata Tuono maggiore fra la Quarta e la Quinta; la Seconda maggiore $\frac{9}{10}$ chiamata Tuono minore fra la Terza minore e la Quarta, ovvero fra la Quinta e la Sesta maggiore; la Seconda minore $\frac{15}{16}$ chiamata Semituono maggiore fra la Terza maggiore e la Quarta, ovvero fra la Quinta e la Sesta minore. Se queste Seconde si adoprano armonicamente, senza dubbio son dissonanze; ma quando si usano come gradi per far transito da una consonanza all'altra, non meritano certamente un tal titolo; perchè recan piacere all'udito. La serie di Seconde, che formano le Scale dei Modi maggiore, e minore, riescono grate per la detta cagione. Si contenti chi legge, ch'io ponga in chiaro questa verità rispettivamente alla Scala del Modo maggiore.

C^{5}_{3}	D^{6}_{4}	E^{6}_{3}	F^{5}_{3}	G^{6}_{4}	A^{6}_{3}	B^{6}_{3}	c^{5}_{3}
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

| $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{15}{16}$ |

C^{5}_{3}	G^{5}_{3}	C^{5}_{3}	F^{5}_{3}	C^{5}_{3}	F^{5}_{3}	G^{5}_{3}	C^{5}_{3}

Si passa colla Seconda C D dalla base dell'accordo C^{5}_{3} a D Quinta di G; colla Seconda D E da D Quinta di G ad E Terza maggiore di C; colla Seconda E F da E Terza maggiore di C alla base dell'accordo F^{5}_{3}; colla Seconda F G dalla detta base a G Quinta

di

di C; colla Seconda G A da G Quinta di C ad A Terza maggiore di F; colla Seconda A B ~~finalmente~~ da A Terza maggiore di F a B Terza maggiore di G; + Il Semituono minore $\frac{24}{25}$ è la sola differenza fra due coppie di consonanze imperfette Terza minore e Terza maggiore, Sesta minore e Sesta maggiore, che con ragione non ha luogo nelle Scale naturali dei due Modi maggiore, e minore. In fatti il Semituono minore è talmente picciolo, che merita un bando pressochè assoluto dall'armonia, giudicandolo l'orecchio uno scordato Unisono. L'ammette la melodia, ma non la più severa, perchè contiene una certa smanceria, che non è punto confacente alla maestà del Sistema Diatonico. Osserva ottimamente il nostro Scrittore Cap. XIV. Art. I. pag. 143. che per intonare il Semituono minore per esempio C C# giustamente, e con facilità, si usa un portamento di voce, col quale si ascende prima in D colla Seconda maggiore C D, e poi si discende in C# colla Seconda minore D C#. *

Ora è tempo di esaminare il Sistema di M. Rameau intorno le armoniche Dissonanze. Riflettesi da lui saggiamente, che per fare che spicchi l'accompagnamento della corda prima o tonica, giova molto l'aggiungere la Dissonanza agli accompagnamenti della Dominante, e della Sottodominante. Nascendo la Dominante dalla

serie

+ e finalmente colla Seconda B C da B Terza maggiore di G a C Ottava di C.

* Non approva M. Rameau la sovrascritta Successione Diatonica dalla prima corda all'ottava; perchè nel Basso fondamentale ciò è il passaggio di Seconda maggiore all'insù F^5 G^5 dalla quarta alla quinta corda, ossia dalla Sottodominante alla Dominante. Ma e come mai si può condannare un tal passo, che diletta l'orecchio, sì altamente, che merita di esser posto fra le Cadenze del Modo per Terza maggiore? Si aggiunga, che gli accompagnamenti tutti da me addottati alle corde della premessa Scala sono determinati dall'origine della Scala medesima generata dai tre accordi C^5, F^5, G^5.

serie armonica ascendente $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c.
aggiunga nel suo accordo $G\frac{5}{3}$ al di sopra
della Quinta D la Terza minore F, che
a G corrisponde in Settima minore.
La Settima, e specialmente quella del-
la quinta corda dei Modi maggiore, e
minore goda il privilegio di potersi
usare senza preparazione; perchè
accettando la ragione $\frac{9}{16}$, che molto
si accosta alla $\frac{4}{7}$ equisonca ad $\frac{1}{7}$ rappor-
to semplicissimo fra i dissonanti, l'orec-
chio ne forma idea, e lo considera come
partecipante del consonante, e del disso-
nante. Udito l'accordo $G\frac{7}{3}$, e non vo-
lendo servirsi di quelli spettanti ai Modi
derivati, si rende necessario il passare
all'accompagnamento $C\frac{5}{3}$ della nota
tonica, acciocchè la Settima F si risolva
discendendo in E Terza maggiore di C.
Sotto l'accordo $F\frac{5}{3}$ della Sottodo-
minante, che trae l'origine dalla progres-
sione aritmetica discendente 1, 2, 3, 4 &c.
giudica opportuno l'ingegnoso Autore di por
la nota D considerata da lui dissonante,
alla quale F si riferisce in Terza minore.
Trasportando poscia D all'Ottava alta,
fa che l'accordo prenda il seguente
aspetto $F\frac{6}{3}$; e persuaso, che la Sottodo-
minante F conservi il suo diritto di fon-
damentale, usa così la Cadenza, chi
egli chiama imperfetta, dalla Sotto-
dominante alla Tonica $F\frac{6}{3}$ $C\frac{5}{3}$, nella
quale la supposta dissonanza D ascende
in E. Ora essendo legge universal-
mente accettata, che la dissonanza tutta

si

si risolvano discendendo, la scesa di D in E mostra chiaramente, che D non è dissonanza, e che l'accordo $F^{\substack{6\\5\\3}}$ deriva da $D^{\substack{5\\3}}$, a cui sia aggiunta la Settima. Per la qual cosa il passaggio $F^{\substack{6\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ non è fondamentale dalla quarta alla prima corda, ma bensì derivato dal fondamentale $D^{\substack{7\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ dalla seconda corda alla prima. E qui si può ricercare, se sia lecito il passaggio $F^{\substack{6\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$, in cui la Quinta di F, che è radicalmente Settima, diviene senza risolversi Ottava di C. Sarà permesso in qualche modo l'usarlo ponendo in opera quell'artifizio, che è praticato piuttosto come licenza, che come regola, ~~appellato Sospensione nel Cap. XVI. dal nostro Autore~~, il quale consiste in far sì, che un suono prima consonante divenga dissonante, e poscia torni ad essere consonante. Succede ciò nel sottoposto esempio $E^{\substack{6\\3}}$ $F^{\substack{6\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$, il cui Basso fondamentale $C^{\substack{5\\3}}$ $D^{\substack{7\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$, nel quale l'Ottava di C diviene Settima di D, e poi ritorna Ottava di C. Io per altro volendo far transito dalla quarta alla prima corda, mi servirei o del passaggio $F^{\substack{5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ senza aggiunta di dissonanza, ovvero di questo altro assai frequentato nelle Cadenze finali ecclesiastiche $F^{\substack{5\\3}}{}^{\substack{6\\4\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$. Il suo Basso fondamentale $F^{\substack{5\\3}}$ $B^{\substack{7\\5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ dimostra, che in esso si congiungono due Cadenze, $F^{\substack{5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ dalla quarta corda alla prima, $B^{\substack{5\\3}}$ $C^{\substack{5\\3}}$ dalla settima corda all'ottava; che rendono il predetto passaggio più conchiudente.

Egli è noto, che la Musica si serve

di

di quattro dissonanze Settima, Nona, Undecima, e Terzadecima. Non riconosce M. Rameau per fondamentale altra dissonanza, salvochè la Settima; ed ignorando la Terzadecima, fa nascere

nel Cap. XVI.

la Nona, e l'Undecima dal sottoporre un suono preso dalla serie aritmetica discendente, che formi colla base dell'accordo della Settima o Terza, o Quinta. Quindi secondo il suo sistema colla Nona va sempre congiunta la Settima, e colla Undecima si suppongono unite la Settima, e la Nona. L'accordo esemplificato della Nona $C\begin{smallmatrix}9\,7\\5\\3\end{smallmatrix}$ ha l'origine dal sottoporre il suono C all'accordo $E\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$, e l'accordo dell'Undecima $C\begin{smallmatrix}11\\9\,7\\5\\4\end{smallmatrix}$ dal sottoporre all'accordo $G\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$ il suono C, e questi si nominano accordi per sottoposizione dal nostro Autore. Acciocchè chiaro apparisca la falsità di un tale Sistema, rifletto, che per lo più la Nona, e l'Undecima si adoprano sole senza il corteggio di altre dissonanze. Ma usata anche la Nona colla compagnia della Settima, l'accordo $C\begin{smallmatrix}9\,7\\5\\3\end{smallmatrix}$ verrebbe dinotato dalla progressione $\frac{C}{4}$, $\frac{E}{5}$, $\frac{G}{6}$, $\frac{B}{15}$, $\frac{D}{9}$, e poichè a C corrisponde il miglior aggregato di ragioni, sarà esso e non mai E riputato suono fondamentale, tanto più, che secondo la famosa sperienza del Sig. Giuseppe Tartini ognuna delle ~~[illegible]~~ riferita al Basso ragioni componenti il sovrascritto accordo, richiede C per terzo suono. Chi dirà mai che il passo $G\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$ $C\begin{smallmatrix}9\,8\\5\\3\end{smallmatrix}$ non sia fondamentale, e che

non

non ci faccia sentire una Cadenza dalla quinta corda alla prima? Anche il passaggio D$^{5}_{3}$ C$^{5}_{4\,3}$ si crederà sempre una Cadenza dalla quarta alla prima corda, nè udendo questa si giudicherà mai, che il vero Basso fondamentale sia D$^{5}_{3}$ G$^{5}_{3}$ C$^{5}_{3}$. ~~Apparirà~~ Si conoscerà maggiormente l'assurdo del Sistema di M. Rameau riflettendo, che per avere la Terzadecima, farebbe di mestieri sottoporre un suono, che ~~si riferisse~~ corrispondesse in Settima alla base dell'accordo della Settima, come per esempio G$^{11}_{9}$. Trovandosi dalla Settima a F$^{9}_{3}$, ed il suono sottoposto G al quale F in Settima si riferisca. Il nostro Autore non si è a tanto inoltrato, e perciò della Terzadecima non ha fatto menzione ....

Confutata solidamente, siccome io penso, l'idea dello Scrittore Francese, resta che si stabilisca essere la Nona, l'Undecima, e la Terzadecima egualmente che la Settima nuovi suoni aggiunti al di sopra dell'accompagnamento consonante di Terza e Quinta, o che come tale si adopra. Quando si compone a sole quattro parti, si tralascia per lo più di unire colla dissonanza quel suono consonante, che le sta una Seconda al di sotto, in cui essa discendendo risolvesi. L'accordo in tal guisa si rende meno piccante, e dopo la risoluzione l'accompagnamento consonante si ode compiuto, siccome formato da un'equisonanza, da una consonanza perfetta, e da una imperfetta. Veggansi gli esempj sottoscritti. C$^{9\,8}_{5\,3}$, C$^{11\,10}_{6\,5}$, C$^{13\,12}_{14\,4}$.

* Si prepara una dissonanza facendo

* La Sospensione secondo il nostro Autore consiste nel conservare uno o più suoni dell'antecedente accordo nel susseguente colla condizione, che i suoni di questo siano inferiori d'una Seconda ai suoni conservati, e possano loro servire di risoluzione. Passando per esempio dall'accompagnamento G$^{5}_{3}$ della Dominante a quello C$^{6\,5}_{3}$ della Tonica, conserva la Quinta D del primo accordo, la quale diviene Nona nel secondo, ~~la qual~~ che essendo una Seconda più acuta dell'Ottava, in essa risolvesi. Coincide sostanzialmente la Sospensione colla giusta idea della dissonanza, che sono nuovi suoni aggiunti all'accompagnamento consonante, # Infatti nel passaggio G$^{5}_{3}$ del conseguente accordo, C$^{9\,8}_{5\,3}$ si vede coll'~~intero~~ armonia consonante di Terza e Quinta accoppiata la Nona, che si risolve nell'Ottava. Non può approvarsi quello che dice M. Rameau, che

\# quando esse nello stesso accompagnamento risolvonsi.

che la Sospensione non ha veruna fondamento, e non ha per principio salvo che il gusto. È la stessa fondata sulla vera natura delle Dissonanze, le quali vogliono essere preparate, introdotte, e risolte. La Sospensione le prepara, le introduce, e le risolve poscia il discender di grado ad un suono consonante dell'~~secondo~~ accordo, a cui si aggiunge il suono dissonante. Passo a spiegare la preparazione più chiaramente.

facendo sì che il suono dissonante sia stato consonante, o dissonante privilegiato nel precedente accompagnamento, ed avendo cura, che la preparazione cada in tempo cattivo, e la Dissonanza in tempo buono, ovvero e l'una e l'altra in due tempi buoni vicini, quali sono il primo, ed il secondo di una Battuta a tre tempi. La sola Settima può essere preparata in tempo buono, ed introdotta in tempo cattivo.

Nel Cap. XIII. Art. I. stabilisce M. Rameau, che la Settima aggiunta all'accordo della Dominante, e la Sesta aggiunta all'accordo della Sottodominante non si debbono preparare; perché quella è equisona alla Sottodominante, e questa è Quinta della Dominante, ed è per se stessa consonante. Per una pari ragione non si dovrebbero preparare la Nona, e l'Undecima aggiunte all'accordo della Nota tonica, ~~del suono principale~~, a cagione che l'una è Quinta della Dominante, e l'altra è Ottava della Sottodominante, ed amendue per se stesse consonanti: il che certamente è falso, e contrario alla pratica. Ho già notato di sopra, che la Settima della Dominante non si prepara; perché molto si avvicina al rapporto $\frac{4}{7}$ equisono ad $\frac{1}{7}$, ch'è il semplicissimo fra i dissonanti. Quanto all'accordo di Terza, Quinta, e Sesta applicato alla Sottodominante, è stato da me dimostrato, che in esso la Sesta è veramente consonanza, ed or aggiungo, che per tal motivo non ha bisogno di preparazione.

Determina

Determina rettamente il ch. Autore che la Settima della Dominante abbia da risolversi discendendo di grado, e riflette che in sì fatta guisa, quando si passa dall' accordo della ~~Toni~~ Dominante a quello della Tonica, il secondo riesce compiuto, come si può raccogliere dal seguente esempio G $\begin{smallmatrix}7\,8\\5\\3\end{smallmatrix}$ C $\begin{smallmatrix}12\\10\\8\end{smallmatrix}$, in cui l'Ottava di G diviene Duodecima di C, la Settima di=scende nella Decima, e la Terza o sia la Nota sensibile ascende all'Ottava.

La nostra Settima privilegiata per altro può tal volta ascender di grado, ed anche muoversi di salto, quando un'altra parte la riassume, ed adempie la risoluzione, come nell'esempio:

G $\begin{smallmatrix}7\\5\\3\end{smallmatrix}$ F $\begin{smallmatrix}6\\(8)\\4\\2\end{smallmatrix}$ C $\begin{smallmatrix}10\\8\\(8)\\3\end{smallmatrix}$, in cui mentre il Basso di=scende da G prima in F, e poscia in C, la parte acuta ascende da F a G. In riguardo alla Sesta aggiunta all'accom=pagnamento della Sottodominante, ben=chè la giudichi dissonanza, sostiene che debba salire di grado alla Terza della Tonica. Questa Sesta, il torno a ripete=re, può ascendere perchè consonante: che se la stessa fosse dissonante, si do=vrebbe preparare, e risolvere discen=dendo, essendo tale la pratica universale di maneggiare la Sesta, o Terzadecima dissonanza.

Non posso senon lodare la deter=minazione, atta dal nostro Scrittore nel Cap. XVII, dei Tuoni ad un dato principale subordinati, essendo essa conforme a quanto ho inse=gnato nel mio Saggio sopra le Leggi del Contrappunto. Un Tuono principale ha per

subordinati

subordinati due Tuoni simili fondati sopra la Dominante, e la Sottodominante, e re Tuoni dissimili relativi al Tuono principale, e ai due simili subordinati. Mi sono già spiegato di sopra, che chiamo Tuoni relativi quelli, che accettano la stessa Scala con questa sola differenza, che se il Tuono maggiore ha per base un dato suono, il minore relativo riceve per base la sesta corda. Il Tuono subordinato fondato sulla Dominante accresce per un minor Semituono il suono della quarta, o della sesta corda del principale, secondochè è maggiore, o minore, e lo stesso fa anche il Tuono dissimile relativo. Al contrario il Tuono subordinato, cui serve di fondamento la Sottodominante, congiuntamente col suo relativo cala per un Semituono minore il suono della settima, o della seconda corda del principale, secondochè questo è per Terza maggiore, o per Terza minore.

Deduce M. Rameau nel Cap. XIV. Art. l'origine del Sistema Cromatico dalla successione fondamentale per Terza, o maggiore, o minore, e supponendo che tutti e due gli accordi siano per Terza maggiore, fa vedere che ne nasca sempre il Semituono minore, e ciò mette in chiaro con ~~due~~ quattro esempi $C^{5}_{3}\ E^{5}_{3\sharp}$, $C^{5}_{3}\ E\flat^{5\,6}_{3}$, $C^{5}_{3}\ A^{5}_{3\sharp}$, $C^{5}_{3}\ A\flat^{5\,6}_{3}$, in ognuno dei quali due suoni si corrispondono nel minor Semituono, cioè nel primo $G\ G\sharp$, nel secondo $E\ E\flat$, nel terzo $C\ C\sharp$, e ~~final~~ nuovamente nel quarto $A\ A\flat$. Scoperta così, siccome egli pensa, l'origine del

Cromatico

Cromatica, aggiunge che si può ottenere il minor Semituono o cangiando la Terza di un suono fondamentale di maggiore in minore, nel passare da un Tuono maggiore ad un minore sulla stessa base fondati, e nel transito da un Tuono all' altro legati da mutua subordinazione; o ancora col mezzo di una comparazione di Dominanti, nella quale la Terza maggiore d'una può discendere Cromaticamente sopra la Settima dell' altra. Giudica ben fatto il notare, che nei passaggi di Terza all' ingiù, e all' insù si determina in qualche caso il Semituono minore, benchè i due accordi siano per Terza minore, come dal seguente esempio raccogliesi. $D^{3}_{\natural}$ $A^{5\#}_{3}$.

Il Sistema Cromatico per dir il vero trae la sua primaria sorgente dalle corde artifiziali; le quali introducono nel Contrappunto e movimenti di melodia, ed accordi al detto Sistema spettanti. Nel Modo maggiore non ci è altro passo propriamente Cromatico, salvochè F $F^{\#}$ dalla quarta corda naturale all' artifiziale, nè dallo stesso si contiene alcun accompagnamento, di cui non si trovi un simile somministrato dal Sistema Diatonico. Il Modo minore è una continua mistura di Diatonico, e di Cromatico. Oltre i Semituoni minori G $G^{\#}$, F $F^{\#}$, D $D^{\#}$, B B^{b} dalle corde naturali settima, sesta, quarta, e seconda alle loro artifiziali, hanno luogo in esso i movimenti di melodia di Seconda

superflua

superflua F G# dalla sesta corda naturale, alla settima artificiale, C D# dalla terza corda naturale, alla quarta artificiale; di Terza diminuita F D# dalla sesta corda naturale, alla quarta artificiale, B♭ G# dalla nona corda alla settima amendue artificiali; di Quarta diminuita C G# dalla corda decima naturale, alla settima artificiale, G D# dalla settima corda naturale alla quarta artificiale. I mentovati intervalli hanno per compimento all'Ottava la Settima diminuita, la Sesta superflua, e la Quinta superflua. Gli accordi Cromatici, di cui si serve il Modo minore gli ho di sopra nominati, ed or li ripeto. G# $^{5}_{3}$ di Terza minore, Quinta minore, e Settima diminuita; D# $^{5\flat}_{3\flat}$ di Terza diminuita, Quinta minore, e Settima diminuita. B $^{5\flat}_{3\sharp}$ di Terza maggiore, e Quinta ~~diminuita~~ minore; C $^{5\sharp}_{3}$ di Terza maggiore, e Quinta superflua.

Finisco di parlare del Sistema Cromatico coll'avvertire, che aggiunte alla Scala del Modo maggiore la quarta corda F# alterata dal Tuono simile fondato sulla dominante, la settima corda B♭ modificata dal Tuono simile fondato sulla Sotto dominante, e le tre corde settime artificiali G#, D#, C# dai Tuoni relativi per Terza minore, ne nasce la compiuta Scala Cromatica procedente per Semituoni sette maggiori, e cinque minori

C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, B♭, B, C

La stessa Scala serve ancora al Tuono A

per

per Terza minore, presa per base la lettera A; imperciocchè componendo o pel Tuono maggiore C, o pel minore A, la si modula per gli stessi sei Tuoni.

Impiega M. Rameau l'Articolo II. del citato Cap. XIV. nello spiegare l'origine del Sistema Enarmonico. I due accompagnamenti G# B D F, Ab B D F negli Organi, e nei Gravicembali ~~sono~~ corrispondono agli stessi tasti, servendo il medesimo tasto a G#, e ad Ab. La Terza minore G# B $\frac{5}{6}$ differisce dalla vera Seconda superflua Ab B $\frac{6}{7}$ per l'Elemento Enarmonico G# Ab $\frac{35}{36}$, il quale nei comuni stromenti di dodici tasti per Ottava si suppone uguale a nulla. Cangiando adunque G# in Ab, si fa in qualche maniera uso del Sistema Enarmonico; e perchè G# $^{7}_{\substack{5\\3}}$, Ab $^{6}_{\substack{4\\2\natural}}$ appartengono, quello al Tuono A, e questo al Tuono C amendue per Terza minore, si passa immediatamente con ripugnanza dell'orecchio da un Tuono all'altro, che non sono legati insieme da una vicendevole subordinazione. Se nel primo accordo si mutasse F in E#, col passaggio G# $^{7}_{\substack{5\\3}}$ G# $^{6\#}_{\substack{5\\3}}$ si modulerebbe dal Tuono minore A al simile D#, che non è al precedente subordinato. + Si possono usare delle altre trasformazioni F $^{6}_{\substack{4\\2}}$ E# $^{7}_{\substack{5\\3\natural}}$, C$^{5\#}_{3}$ C$^{6\flat}_{3}$, che non si nominano dal nostro dotto Scrittore. Colla prima si passa dal Tuono maggiore C al minore B#; e colla seconda dal Tuono minore A al simile F, e nell'una e nell'altra il Tuono susseguente non è subordinato all'antecedente. Abbiamo

veduto

+ Che se nel secondo accordo si cangiasse B in Cb, il passaggio Ab $^{6}_{\substack{4\\2\natural}}$ Ab $^{6}_{\substack{4\\3\flat}}$ si trasferirebbe da C minore ad Eb minore, Tuoni mutuamente non subordinati.

veduto risultare la Scala Cromatica dall'unione del Tuono principale coi cinque subordinati. Per far nascere il Sistema Enarmonico, egli è di uopo accoppiare al principale parecchi Tuoni, che non gli ^hanno^ ^con lui subordinazione^ sono subordinati. Questa è la ragione, per cui il Sistema Enarmonico inventato dai Greci è andato poscia in disuso per la sua soverchia difficoltà, la quale era una tacita ammonizione del senso della irregolarità del Sistema. Loda M. Rameau il Teatro Italiano, il quale ci offre delle scene ammirabili, ponendo in opera le mentovate trasformazioni. Per intonare rettamente sì fatti passaggi, si richiede gran perizia di canto, e l'ajuto del Cembalo a cagione di superare la ripugnanza, che prova l'orecchio [illegible]

Io non mi porrò minutamente ad esaminare la regola, che dà il nostro celebre Autore per la Composizione ^nel Cap. XVIII.^ Chi legge, se così gli aggrada, la potrà paragonare con ciò che prescrivo nel Saggio sopra le Leggi del Contrappunto. Dirò bensì, che quelle, che hanno relazione alla Sesta aggiunta all'accordo della Sottodominante, ed alla dissonanza per sottoposizione, sono fondate sul falso. Non può nemmeno ammettersi, come ho notato di sopra, che ~~e~~ sia la Dominante e del Tuono A per Terza minore sia il Basso fondamentale dello accompagnamento $G\sharp^{5}_{3}$ di Terza minore, Quinta ^minore^, e Settima diminuita corrispondente alla Nota sensibile. Se $G\sharp^{5}_{3}$ derivasse da $E^{5}_{3\sharp}$

e $G\sharp^{7}_{5\,3}$, dovrebbe segnarsi così $G\sharp^{6\,7}_{5\,3}$. L'accordo $G\sharp^{7}_{5\,3}$ nasce dal sostituire nell'accompagnamento fondamentale $G^{7}_{5\,3}$ alla settima corda naturale G l'artificiale G♯.

La riflessioni, che fa M. Rameau nel Cap. XIX. sopra i Sistemi Musici degli Antichi sono giustissime. Essendo la Musica un'aggregato di melodia, e di armonia, e non conoscendo eglino salvochè la prima, i loro Sistemi non potevano riuscire perfetti. Zarlino, che ha preso per principio la Proporzione Armonica, ha neglette in essa ciò che vi ha di più prezioso, cioè l'Armonia. La scoperta, che i due Modi maggiore, e minore nascono dall'applicare * [¶ aggiungendovi massimamente la considerazione de' Modi derivati, che traggono ancor essi l'origine dall'adattare gli appropriati accompagnamenti di Terza e Quinta ai convenienti Sistemi di Melodia.] i due accordi consonanti fondamentali al Sistema di Melodia, era necessaria per poter condurre la Musica all'intera sua perfezione: * Non è persuaso il nostro Autore dalla ragione dalla regola che prescrive Zarlino pel Contrappunto, e per esempio di quella che riguarda le Ottave, le Quinte, e le Terze maggiori consecutive. Pretende M. Rameau che il difetto di Legatura ne sia l'unico fondamento, la quale consiste in un suono comune all'armonia di due accordi fondamentali successivi. La più elegante maniera di passare da uno all'altro accompagnamento, che abbiano un suono comune, si è di far sì, che la stessa parte tocchi il suono comune, il che stabilito, è parimente determinato il più semplice movimento di ciascuna delle altre parti. Nel passaggio dal Basso $G^{8}_{5\,3}$ – C^{5}_{3} dalla Dominante alla Tonica accompagnata + il suono G comune

$+\,G^{5\,3} — C^{5}$ (10, 8)

ai

ai due accordi, che nell'uno è base, e nell'altro Quinta, sia cantato dalla medesima parte, la quale con ciò farà transito da un'equisonanza ad una consonanza perfetta. Un'altra parte si muoverà di grado da B Terza maggiore di G consonanza imperfetta a C Ottava di C equisonanza, e finalmente la parte più acuta modulerà parimente di grado da D Quinta di G consonanza ~~imperfetta~~ ad E Decima maggiore di C consonanza imperfetta. Si osservi ch'eccettuato il passo fondamentale, le rimanenti tre parti procedono da consonanza a consonanza di specie diversa; cioè a dire da equisonanza a consonanza perfetta, da consonanza imperfetta a equisonanza, da consonanza perfetta a consonanza imperfetta. *

Perchè ciò più facilmente comprendasi, * Ho legate con una linea le due consonanze cantate dalla stessa parte.

Oltre le notate quattro ~~movimenti~~ modulazioni frattanto, se ne usano altrettante frequentemente dai Maestri, dalle quali resta esclusa quella, che si forma nel suono G comune ai due accordi. Anche qui Ho avuta la cura di connettere con una linea ~~orizzon~~tale le due consonanze toccate dalla medesima parte, acciocchè chiaramente si vegga, che ognuna delle tre parti non fondamentali passa da una consonanza all'altra di varia specie, mentre il Basso con un salto di Quarta all'insù si trasferisce dalla Dominante alla Tonica, come qui sotto.

12 — 4
10 — 5
4 — 3
G   C.

Io dunque prescriverei la regola da osservarsi almen per lo più, che le parti acute facessero transito da consonanza a

consonanza

consonanza di specie diversa, in riguardo al Basso fondamentale o non moven-
dosi; ovvero movendosi alla consonanza
più prossima del susseguente accompa-
gnamento. In sì fatta guisa si pongono
in opera, alternamente i passi fondamentali di Seconda all'insù, e
all'ingiù, che non hanno verun legamento. Mi serva d'esempio il passo
dalla Sottodominante alla Dominante nel
Modo minore $D^{\substack{6\\5\\3}}\;C^{\substack{5\\3\sharp}}$, e si noti, che
la parte più prossima al Basso si trasferisca
da una consonanza imperfetta all'equiso-
nanza, la parte media da una consonanza
perfetta ad una imperfetta, la parte più
acuta da un'equisonanza ad una consonan-
za perfetta.

Ho detto, che la regola di far transito
da una consonanza all'altra di specie diver-
sa si deve osservar per lo più, perchè ci
sono dei casi, in cui si deve, o si può tras-
gredire. Si consideri il passaggio nel Modo
minore, che M. Rameau chiama Cadenza rotta
$C^{\substack{6\\5\\3\sharp}}\;F^{\substack{5\\3}}$, e si vedrà, che mentre le due
parti più acute passano da consonanza
a consonanza di specie diversa, la parte
più vicina al Basso fa due Terze maggiori
di seguito. Benchè il nostro Autore
non ammetta altra Cadenza, salvochè le
due dalla Dominante, o dalla Sottodomi-
nante alla Tonica, la pratica universale
ne ricava altrettante dalla Tonica, o dalla
Sottodominante alla Dominante. Nel
Modo minore la Cadenza dalla Sottodomi-
nante alla Dominante, ossia dalla quarta
alla quinta corda si suole frequentissimamente

usare

usava così $7^{\substack{6-4\\ -5\\ 3-3\sharp}}\,C$, tollerandosi che le due parti più acute facciano due Quarte ~~di seg.~~ consecutive.

Si cavi la conseguenza, che non da difetto di Legatura, ma bensì da quello di varietà dipende la proibizione delle due Ottave, e delle due Quinte di seguito, facendo la gran perfezione di queste consonanze troppo apertamente conoscere il mentovato difetto. Cedendo la Quarta di perfezione alla Quinta, si praticano due Quarte consecutive, purchè non mai al Basso, ma bensì alle parti di mezzo si riferiscano, il che per altro io consiglierei i Maestri ad essere molto parchi.

Molte altre mancanze trova M. Rameau nella Regola del Zarlino, le quali anche al giorno d'oggi sono seguite dai Musici. Si prescrive, che il Tritono si salvi colla Sesta. Ciò è vero, quando il Tritono nasce da un rivolto di Settima, esempigrazia $7^{\substack{6-\\ 4-6\\ 2-3}}\,C$. Ma se trarrà l'origine dall'accordo $B^{\substack{7\\ 4\\ 3}}$, si maneggerà diversamente nel modo che segue $7^{\substack{6-4\\ 4-5\\ 3}}\,C^{3\sharp}$. Questo passaggio derivato dipende dal fondamentale $B^{\substack{7\\ 3}}\;C^{\substack{5\\ 3\sharp}}$.

Le combinazioni tutte d'un oggetto composto non possono essere esaurite dalla Regola mentovata. Afferma il lodato Scrittore, che sino al presente sono state confuse la <u>Sospensione</u>, e la <u>Sottoposizione</u>, l'Armonia riversata, e la Fondamentale; il che certamente non deve ammettersi. La <u>Sospensione</u> si accorda colla giusta idea della dissonanza, quando, come di ordinario costumasi, colla dissonanza non si

congiunge

congiunga il suono, in cui si risolva, e quando la dissonanza si introduca, e si risolva nello stesso accompagnamento; laddove la Sottoposizione merita di esser esclusa dal Contrappunto, qualmente è stato da me dimostrato.

Cominciano i Musici a gustare il Basso fondamentale, ma crede M. Rameau, ch'essi si fidino ancor troppo della loro orecchia, che non li può istruire salvoché in quella parte, che è a lei sensibile. Astraendo da questo sentimento, la ragione, secondo lui, abbraccia tutto, e può in seguito farne parte all'orecchio nei casi particolari. Sarà sempre mia ferma opinione, che l'esperienza, ed il raziocinio si debbano insieme congiungere per determinar rettamente le Leggi del Contrappunto.

Del Suono Falso
Dissertazione
stampata nel Prodromo dell'
Enciclopedia Italiana
pag. 96.
1779.

Questa Dissertazione con poca varietà formava lo Schediasma X della parte II. (che non fù publicata) dell'Opera delle Corde, ovvero Fibre elastiche, ed in essa avea per titolo.

Delle vibrazioni delle Corde inegualmente ~~grosse~~ grosse

1. Non mi è giammai pervenuto a notizia, che da veruno autore sia stata posta in chiaro la vera ed intima proprietà, mercè la quale parecchi suoni si giudicano falsi dal nostro orecchio. Si potrebbe sospettare, che il suono falso tragga l'origine da un aggregato di suoni dissonanti: ma fatta la riflessione, che con parallelepipedi, o con cilindri si formano dagli stromenti grati all'udito, e che per esempio un cilindro rende un aggregato di suoni assai dissonante, si cavi la conseguenza, che da una tale unione di suoni non dipende la natura del suono falso. I suoni di un cilindro si accostano alle ragioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81, 9 : 121, 9 : 169 &c, dalle quali non i suoni acuti calano, salvochè per la metà crescente del un Comma 80 : 81. E qui, giacchè mi si presenta l'occasione, non voglio lasciar di riflettere quanto sia falso il supposto di M. Rameau, che tutti i corpi sonori producano l'aggregato di suoni espresso dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, e quanto conseguentemente sia debole il fondamento, sul quale appoggia l'accordo per terza maggiore. Quantunque i suoni tutti di un cilindro sian mutuamente dissonanti, nulladimeno ogni suono è giusto, e giusta parimente

La

la loro unione, nella quale il suono più grave predomina, e copre gli altri. ~~Il~~ Egli è necessario adunque da sorgente diversa derivare l'origine del suono falso. Maneggiando il problema delle vibrazioni delle corde inegualmente grosse, mi è riuscito di scoprire l'importante verità, che si danno moltissime corde, che non possono vibrarsi colla legge di un pendolo a cicloide, impiegando nelle successive vibrazioni sempre un tempo costante. + ~~Cercasi prima la curva, alla quale dovrebbero adattarsi, acciocchè le loro vibrazioni fossero isocrone, quando si passa a determinare il tempo di ogni vibrazione, si scuopre allora esser tanto immaginario, che quanto adesso impossibile.~~ Una di sì fatte corde adunque non può vibrarsi isocrona, ma dentro certi per altro ~~[illegible]~~ limiti fa transito dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave. Se una corda può vibrarsi colla legge di un pendolo cicloidale, prende una di quelle figure, ch'equilibrate soglio chiamare; perchè le forze accelerano o ritardano soltanto quelle particole, a cui sono applicate, nè si dà comunicazione di moto da una particola all'altra. Le corde inegualmente grosse, di cui parliamo, sono sempre sbilanciate, ed il moto

passa

+ Tali sono quelle corde, la cui varia grossezza non è regolata da una legge costante.

passa continuamente da particola a particola, senza che possano giammai pervenire ad una equilibrata figura. Da ciò procede l'ineguale durata delle loro vibrazioni, e l'incerto suono, che rendono. Con una corda, il cui suono è giusto, se tento di porre all'unisono un'altra, che produce un suon falso, e tali sono frequentemente le corde di minugia, non otterrò mai perfettamente l'intento, sembrandomi la seconda ora unisona colla prima, ora più grave, ed ora più acuta; segno evidente del suo suono incostante. Or ecco messa in chiaro l'idea giusta del suono falso. Qual corpo sonoro produce un suono falso, le cui vibrazioni non sono isocrone, ma stando fra determinati confini, con una perpetua vicenda passano dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave.

III. Non voglio tralasciar di notare, sembrarmi probabilissimo, che l'avere, o il non avere orecchio musico dipenda dalla struttura del nervo uditorio. Se un tal nervo è capace di oscillazioni isocrone, si vibra perfettamente unisono ai suoni esteriori, e concependoli l'anima con precisione, gli paragona insieme, ed intende l'armonia con diletto. Ma se il nervo, mento=

vato

vato non impiega nel fare le sue vibrazioni un tempo costante, in cambio di oscillare esattamente unisono ai suoni esterni, porta all'anima de' suoni falsi, la quale perciò forma un'idea imperfetta dell'armonia, e poco, o niun piacer ne raccoglie. Si conferma vie più la mia congettura osservando, che se qualunno sfornito di orecchia musica vuol cantare all'unisono con un altro, non intona mai giusto; perché le voci del compagno vengono con alterazione trasferite all'anima dal sensorio.

IV. L'idea stabilita del suono falso riceverà maggior lume dal problema, che nasce dalle vibrazioni *

* Delle corde inegualmente grosse. Se la grossezza varia secondo una data legge, la corda può sempre vibrarsi isocrona. Non così succede, se la grossezza non soggiace alla medesima legge. Comincerò dalle prime corde, e poi dirò qualche cosa delle seconde.

Delle Vibrazioni delle Corde di inegualmente grossezza regolata da una legge costante.

Se per trovare i tempi, in cui le corde inegualmente grosse, di cui parliamo, fanno una vibrazione, si va in traccia delle curve, alle quali oscillando si adattano; si incontrano infinite equazioni colle variabili talmente miste e confuse, che non riesce di separarle. Il moto trattorio ce ne somministrerebbe, è vero, la costruzione meccanica; ma da questa non si può dedurre col calcolo il valore della costante, la cui radice divisa per la radice della lunghezza del pendolo a secondi si eguaglia, come vedremo, al tempo di una vibrazione

vibrazione delle corde predette. Per vedersi più addentro nella materia, cerchiamo l'equazione della curva, a cui si accomoda una corda di grossezza variabile, mentre si vibra.

V. Sia AA' (Fig. 2.) una corda di grossezza variabile; si domanda a qual curva $ACTCA'$ oscillando si adatterà. Si chiamino $AA' = L$, $AH = x$, $HK = dx$, $HD = y$; la massima ordinata $CT = c$, il raggio osculatore $TD = TC = r$, e di più si esprima per M la massa della corda, per P la forza che la tende, e ~~finalmente~~ per f la forza, che sollecita la particola DC ~~...~~ per la direzione CK. Si ponga l'elemento della curva $DC = ds$, e condotte le minime tangenti DP, CP, e compiuto il parallelogrammo DN, sappiamo per i canoni della forza composta, che lo stiramento P della corda CD sta alla forza f, che la spinge per la direzione PN, come $DP : PN$: ma $DP \cdot PN :: TD : DC$; dunque analiticamente $P : f :: r : ds$, e perciò $f = \frac{P\,ds}{r}$ si è quella forza, che stimola la particola DC per la direzione DT, la quale coincide adequatamente colla direzione DH, supponendosi minima la saetta CT, e la curva ATA' presso che parallela alla linea AA'. Per un tal motivo potendosi confondere ds con dx, avremo $f = \frac{P\,dx}{r}$: ma prendendo dx

costante

costante; e supponendosi dy minima rispettivamente a dx, $r = \frac{dx^2}{-ddy}$: dunque $f = -\frac{P\,ddy}{dx}$.

La grossezza variabile della corda si eguagli alla funzione φx dell'ascissa $AH = x$, ed il volume della particola HK pareggerà la grandezza $\varphi x \cdot dx$. La sommatoria di questa formola, quando $x = AA' = L$, mi renderà noto il volume ch'io chiamo $V = \int \varphi x \cdot dx$ della corda totale. Facciasi $V : \varphi x \cdot dx :: M : \frac{M\varphi x \cdot dx}{V}$, ed il quarto termine dell'analogia ci dà la misura della massa spettante all'elemento De della corda.

Dividendo la forza sollecitante $f = -\frac{P\,ddy}{dx}$ per la detta massa, ne risulta la forza acceleratrice $= \frac{Vf}{M\varphi x \cdot dx} = \frac{-VP\,ddy}{M\varphi x \cdot dx^2}$, la quale se tutti i punti della corda $AeDe'A'$ hanno da pervenire nel medesimo istante alla retta AA', dee stabilirsi proporzionale all'ordinata $HD = y$, onde ne provenga l'equazione $-\frac{VP\,ddy}{M\varphi x \cdot dx^2} = \frac{y}{a}$, o sia l'equivalente $-\frac{aVP\,ddy}{My} = \varphi x \cdot dx^2$ (1.)

Detta la grandezza $\frac{aVP}{M} = g$ (2.), la nostra formola si riduce alla seguente $-\frac{g\,ddy}{y} = \varphi x \cdot dx^2$ (3.)

VI. Si ridurrà una tal formola alla prima differenza ponendo $\log. y = v$ nel vano delle ordinate decrescenti della

logistica

logistica riferita al protonumero c, la cui suttangente = 1, onde si abbia $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}}$. Il calcolo ci insegnerà essere $\frac{ddy}{y} = -ddv + dv^2$, valore, che sostituito nella formola (3.) la trasforma così $g \cdot ddv - dv^2 = \varphi x \cdot dx^2$ (4.). Metto $dv = -z\,dx$, ed ho differenziando $ddv = -dz \cdot dx$. Colloco nella equazion (4.) in vece di dv, e di ddv i loro valori, e trovo, fatta la divisione per dx, $-g\,dz - g^2 z^2 dx = \varphi x \cdot dx$ (5.), formola, in cui si sono dileguate le seconde differenze.

VII. Pongasi $\varphi x = \frac{G^2 x^m}{H^m}$, e ne risulterà $-g\,dz - g^2 z^2 dx = \frac{G^2 x^m dx}{H^m}$ (6) formola proposta negli Atti di Lipsia agli Analisti dal Co: Jacopo Riccati, acciocchè determinassero gli infiniti casi, nei quali si possono separare le variabili, il che avviene, quando sia $m = 0$, $m = -4$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{3}$, $m = -\frac{8}{5}$, $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{16}{9}$, e generalmente $m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, preso per n un qualunque numero intero, e positivo, il quale cominci dal zero, e seguiti per la serie de' numeri naturali.

Si può anche stabilire $\varphi x = \frac{\overline{H \pm x}^m \cdot G^2}{H^m}$, e si otterrà la separazione dalle indeterminate, qualora ad m si adattino i mentovati valori. Imperciocchè usata la sostituzione $H \pm x = q$, ci si presenterà $-g\,dz \mp g^2 z^2 dq = \pm \frac{G^2 q^m dq}{H^m}$, ch'è un' equazione simile alla (6.).

Attribuita

Attribuita a φx la detta grandezza, ed essendo $m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, si potranno mediante la separazione delle variabili costruire le curve, in cui si ripiegano nell'atto di vibrarsi le nostre corde. Negli altri casi riuscirà opportuno il ricorrere al moto trattorio, dal quale per altro non si raccoglierà, salvochè meccanicamente la grandezza della costante g: Le corde triangolari richiedono $\varphi x = \frac{Gx}{L}$, onde sia $m = 1$, ed in riguardo alle corde di figura conica abbiamo $\varphi x = \frac{G^n x^n}{L^n}$ e per conseguenza $m = n$. Benchè questi due valori di m non permettano, che si separino le variabili nella formola $-g\,dz - gz^2 dx = \varphi x \cdot dx$, nulladimeno verso alla fine della presente Dissertazione + recherò un metodo, mediante il quale si determina analiticamente il valore della costante $g = \frac{aVP}{M}$, e conseguentemente anche quello della costante $a = \frac{gM}{V.P}$.

+ dove tratterò delle vibrazioni delle predette corde triangolari, e coniche,

Postochè una corda inegualmente grossa possa vibrarsi isocrona, determinare il tempo di una sua vibrazione.

VIII. Sia $A e 7 e' A'$ la figura, a cui dee adattarsi la corda per vibrarsi isocrona

isocrona, ed accaderà, che tutti i suoi punti scorrano in pari tempo le rispettive ordinate. Ciascun punto adunque sarà isocrono alla corda totale; e quindi trovato il tempo, in cui si vibra un punto, resterà parimente determinato il tempo di una vibrazione della intera corda. Scelto il punto $\mathcal{F}$, a cui corrisponda la massima ordinata $\mathcal{F}=c$, abbia esso nel tempo t scorso lo spazio $\mathcal{F}B_{\wedge} = c-y$, ed acquistata la velocità $= u$, e restandogli da passare lo spazio $BC=y$ per giungere alla linea retta AA', sia fornito della forza acceleratrice $= \frac{y}{a}$, come richiede la legge della isocrona vibrazioni. Mi servo della formola ridotta alla misura conosciuta dall' Ab. Co. Vincenzo Riccati nella Lettera X. sopra i Principj della Meccanica e chiamo E lo spazio scorso da uno de' nostri gravi vicino alla superficie della terra in un minuto secondo, ch'esprimo per K. Avremo pertanto $-\frac{2E\,y\,dy}{a} = u\,du$, ed integrando colla aggiunta della costante necessaria, acciocchè nel sito $\mathcal{F}$ sia $u=o$, $\frac{2E}{a}\cdot\overline{c^2-y^2} = u^2$, ed estratta la radice $\sqrt{\frac{2E}{a}}\sqrt{c^2-y^2} = u$. In cambio di u pongo il suo valore $= -\frac{K\,dy}{dt}$, e mi si presenta $\sqrt{\frac{2E}{a}}\sqrt{c^2-y^2} = -\frac{K\,dy}{dt}$ ovvero $dt = \frac{K\sqrt{a}}{\sqrt{2E}}\cdot\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e passando alla integrazione, $t = \frac{K\sqrt{a}}{\sqrt{2E}}\cdot\frac{\text{Arco Rag. } c \text{ Cos. } y}{c}$.

Fatto

Fatto centro in C, col raggio $CZ = c$ si descriva il circolo $ZGZ'G'$, e tirata l'ordinata BG, lo spazio ZB si scorrerà nel tempo $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{2\varepsilon}} \cdot \frac{ZG}{ZC}$. Nell'integrazione non si è aggiunta costante; perchè quando $ZB = 0$, si trova rettamente $t = 0$. Pongo $= b$ il quadrante di circolo del rag=gio c, ed osservo che quando com=piuta una vibrazione, lo spazio ZB è divenuto uguale ad ZZ', l'arco ZG passeggia due quadranti; e quindi una vibrazione dal punto Z, e della corda intera si compie nel tempo $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{2\varepsilon}} \cdot \frac{2b}{c} = \frac{k\sqrt{a}}{\frac{c}{2b}\sqrt{2\varepsilon}}$

Egli è noto, che la quantità $\frac{c}{2b}\sqrt{2\varepsilon}$ si agguaglia alla radice della lun=ghezza di un pendolo a secondi. Detta dunque h la predetta lunghezza, una corda inegualmente gros=sa, che possa vibrarsi isocrona, esulterà nel tempo $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ (Z); il quale verrà espresso in parti di secondo.

Affinchè una corda possa vi=brarsi isocrona, egli è necessario, che il valore della costante a non solo sia reale, ma ancora positivo. Se il detto valore sia negativo, il tempo impiegato in una vibrazione diviene immaginario, che è quanto a dire im=possibile la vibrazione in tale ipotesi

la

~~la formola [illegible] z e y [illegible]~~
~~[illegible] [illegible] della costante,~~
~~non potrebbe mai [illegible]~~
~~[illegible] che si separano; perche [illegible]~~
~~[illegible] [illegible]~~
~~[illegible] il valore della costante~~
~~[illegible] grossa~~
~~non può [illegible]~~
~~[illegible].~~

Diamo ora gli esempj di varj casi, in cui si separano le variabili nella formola $-gc^2z - gz^2dx = \frac{G^2 \cdot \overline{H \pm x}^m \cdot dx}{H^m}$

~~IX~~ Esempio I.

Determinare la curva, alla quale si accomoda, mentre si vibra, la corda fornita della grossezza $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$.

IX. Sia la grossezza della corda $\varphi x = \frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$. Posta $x = 0$, avremo $\varphi x = G^2$, e posta $x = L$, avremo $\varphi x = \varphi L = \frac{G^2H^4}{\overline{H+L}^4}$. Poiché ho determinato il volume della corda $V = \int \varphi x \cdot dx$, quando $x = L$, ne risulta $\int \varphi x \cdot dx = \int \frac{G^2H^4 dx}{\overline{H+x}^4} = \frac{G^2H}{3} - \frac{G^2H^4}{3 \cdot \overline{H+x}^3}$
$= G^2H \cdot \frac{3H^2x + 3Hx^2 + x^3}{3 \cdot \overline{H+x}^3}$. Ho aggiunta la costante necessaria, acciocchè il volume della corda si annulli, quando $x = 0$. Mettendo $x = L$, scopro $V = G^2H \cdot \frac{3H^2L + 3HL^2 + L^3}{3 \cdot \overline{H+L}^3}$ (8), volume intero della corda: Questo valore si sostituisca nella formola (2.) $\frac{aVP}{M} = g$, e ne nascerà $g = \frac{aPG^2H}{M} \cdot \frac{3H^2L + 3HL^2 + L^3}{3 \cdot \overline{H+L}^3}$ (9.)

Nella

Nella formola $-g\,dz - g z^2 dx = \frac{G^2H^4\,dx}{(H+x)^4}$ pongo $H+x = q$, e mi si presenta l'equazione $-g\,dz - g z^2 dq = \frac{G^2H^4\,dq}{q^4}$. Giungeremo alla bramata separazione delle variabili, facendo $-z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2}$ (10.), e per conseguenza $z^2 = \frac{1}{q^2} - \frac{2p}{q^3} + \frac{p^2}{q^4}$; e presa la differenza, $-dz = \frac{dq}{q^2} + \frac{dp}{q^2} - \frac{2p\,dq}{q^3}$. Adempiuta la sostituzione di questi valori, trovo dopo le dovute operazioni $\frac{G^2H^4\,dq}{g q^2} = \frac{\frac{G^2H^4}{g}\,dp}{\frac{G^2H^4}{g} + p^2}$ (11.), e passando all'integrazione, $B - \frac{G^2H^4}{gq} = \text{Arco Rag. } \frac{GH^2}{\sqrt{g}}\ \text{Tang. } p$ (12.)

abbiamo $-dv = \frac{dy}{v} = z\,dx$: ma nella logistica la ragione maggiore di qualunque data fra l'ordinata $= dy$, e l'ordinata $= 0$ esige, che sia l'intercetta $-dv = \infty$; dunque sarà parimente $z\,dx$, e molto più $z = \infty$.

X. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A $y = 0$, # ~~[illegible] logaritmica esser dee infinita [illegible] $\int z\,dx = \int z\,dq$; dunque $\int z\,dx = \infty$, e parimenti [illegible] costante [illegible]~~ * La formola $H+x = q$ m'insegna, che nel sito A, ove $x = 0$, abbiamo $q = H$; dunque nel detto sito la formola (10.) prende il seguente aspetto $-z = -\frac{1}{H} + \frac{p}{H^2}$; e quindi sendo $z = \infty$, si comprende esser tale ma preso negativamente + anche p. Ora la tangente $p = \infty$, quando l'arco di circolo pareggia un quadrante.

~~* [illegible], essendo [illegible] $-\frac{dy}{y}$ [illegible] $z\,dx = \frac{dy}{v}$ [illegible] $\frac{dy}{v}$ [illegible] sarà parimente [illegible] $z\,dx$, e molto più z [illegible] Nella logistica [illegible] fra due ordinate [illegible] maggiore di qualunque data [illegible] intercetta [illegible] $\frac{dy}{v}$ [illegible]~~

+ onde a z positivo corrisponda p negativo, e al contrario

quadrante. Chiamato b il quadrante del raggio c, sarà $\frac{bH^2G}{c\sqrt{g}}$ il quadrante del raggio $\frac{GH^2}{\sqrt{g}}$, e perciò in riguardo al punto A avremo $B - \frac{G^2H^3}{g} = \frac{bGH^2}{c\sqrt{g}}$, e conseguentemente $B = GH^2 \cdot \overline{\frac{GH}{g} + \frac{b}{c\sqrt{g}}}$.
Colla sostituzione di questo valore l'equazione (12.) si trasforma così

$$GH^2 \cdot \overline{\frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{GH}{g} - \frac{GH}{gy}}^2 = \text{Arco Rag.} \frac{GH^2}{\sqrt{g}} \text{Tang.} \rho \quad (13.)$$

Rimane, che si determini la costante g. Nel punto A' abbiamo $y = H+L$, $y = 0$, $\rho = \infty$. Sarà la tangente ρ infinita, qualunque volta l'arco circolare (lasciato da parte il caso testè notato relativo al punto A, in cui l'arco pareggia un quadrante) s'eguaglia a quadranti 3, 5, 7, &c. Espresso per un qualsisia termine della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. il termine generale della progressione 3, 5, 7, 9 &c. verrà dinotato dalla quantità $2n+1$. Scopriremo pertanto

$$GH^2 \cdot \overline{\frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{GH}{g} - \frac{GH}{g \cdot \overline{H+L}}}^2 = \overline{2n+1} \cdot \frac{bGH^2}{c\sqrt{g}},$$

e ridotto che sia il computo,

$$g = \frac{c^2L^2G^2H^2}{4n^2b^2 \cdot \overline{H+L}^2} \quad (14.)$$

Sostituisco questo valore nella formola (13.), onde prende il seguente aspetto

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{2nb \cdot \overline{H^2+HL}}{cL} + \overline{\frac{4n^2b^2 \cdot \overline{H^2+HL}}{c^2L^2H} - \frac{4n^2b^2 \cdot \overline{H^2+HL}}{c^2L^2 y}}^2$$

$$= \text{Arco Raggio } \frac{2nb \cdot \overline{H^2+HL}}{cL} \text{ Tang.} \rho,$$

e

ponendo

ponendo il raggio $\frac{2nb.\overline{H^2+HL}}{cL} = C$ (15.)

$\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{H} - \frac{C^2}{g}$ = Arco Raggio C Tang. p (16.)

XI. Ora passo a costruire la curva, in cui si ripiega la nostra corda. Tiro l'indefinita A'B' (fig. 2.), ed in essa segno $A'A = L$, $AB = H$, $BL = LB' = C = \frac{2nb.\overline{H^2+HL}}{cL}$. Fatto centro in L, col raggio LB descrivo il circolo B'OBO'B', e poscia per i punti B', B, A, A' delineo le normali all'infinito prolungate M'B'aM', MBaM, QAP, A'P'Q'. Sia DRD'P' un'iperbola Apolloniana, nella quale qualunque rettangolo $BK.KD = C^2$. Se sia l'assissa $BK = g$ si troverà la corrispondente ordinata $KD = \frac{C^2}{g}$. Segno l'arco $B'OBO'T = \frac{bC}{c} + \frac{C^2}{H}$, ed osservo, che quando H sia positiva, il detto arco è sempre maggiore di quadranti 2+2n, e per conseguenza l'arco $OBO'T = \frac{C^2}{H}$ (tagliato B'O uguale al quadrante $\frac{bC}{c}$) maggiore di quadranti 2n. E vaglia il vero $\frac{C^2}{H} = \frac{bC}{c} . \frac{cC}{bH}$: ma per la formola (15.) $\frac{cC}{bH} = \frac{2n.\overline{H+L}}{L}$; dunque $\frac{C^2}{H} = \frac{bC}{c} . 2n . \frac{\overline{H+L}}{L}$, quantità sempre maggiore di $2n . \frac{bC}{c}$. La figura 2. l'ho adattata al caso di n=1, e di

$H = \frac{a}{4}$, il quale mi dà $\frac{C^n}{H} = \frac{bC}{c} \cdot na^n$.

Preso ad arbitrio l'arco B'ON $= \frac{bC}{c} + \frac{C^n}{H} - \frac{C^n}{q}$, a cui si riferisca la tangente B'H = p, sarà l'arco T'O'N $= \frac{C^n}{q}$. Si determini la linea BM uguale a quest'arco, e tirata MD parallela a BA', intersecherà l'iperbola DD'D' nel punto D, per cui condotta DK parallela ad MB, avremo per la natura di essa curva BK = q. Rese note in tal guisa le due linee relative B'H = p, BK = q, la formola (10.) $-z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^n}$ manifesterà il valore di z, a cui fatta uguale l'ordinata KG, il punto G apparterrà alla curva QGCG'Q', le coordinate della quale BK = q, KG = z. Dalla formola (10.) raccogliesi, che z = 0 richiede la condizione p = q. Se dunque l'arco T'O'I = CR sarà tale, che si abbia B'S = p = BC = q, l'ordinata KG = z si annullerà nel punto C. Ciò succederà tante volte, quante unità si contano in n. Nella fig. n. 2 svanisce una sola volta; perchè supponesi n = 1, e le linee AQ, A'Q' servono di assintoti ai due rami CGQ, CG'Q'. Per altro sarà generalmente n il numero delle coppie dei predetti rami, ed AQ, A'Q' gli assintoti dei rami estremi.

Si aja CGK $= \int -z\,dq = v = \log. y$

nella

nella logistica della suttangente =1, riferita al protonumero C7 = c pel num.^ro VI. Si ricorra dunque alla predetta logistica, ed il numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti corrisponde al logaritmo = CGK pareggerà l'ordinata Ke = y della curva Ae7e'A', a cui si accomoda la nostra corda, mentre si vibra. Al punto C conviene l'ordinata massima C7 = c; perchè quivi CKG = log. y = log. c = 0. Nei punti A, A' CKG, ovvero CK'G' = ∞, e per conseguenza y = 0. Supponendosi nella fig. 2. n = 1, la curva è fornita di un ventre solo. Sarà frattanto n il numero dei ventri collocati a vicenda, uno dalla parte delle ordinate per esempio positive, ed il vicino da quella delle ordinate negative.

XII. Giudico confacente l'indagare i valori delle ascissa BK = q, quando Ke = y = 0. Ho stabilito al num.^ro X, che y si annulla, qualora l'arco BON s'eguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9, 11, &c. Se n = 1, è soltanto y = 0 nel punto estremo A' della corda, quando il predetto arco pareggia 3. quadranti. Se n = 2, corrisponde y = 0 ai numeri di quadranti 3, 5, e la curva ha due ventri. Si riferisca y = 0 ai numeri di quadranti 3, 5, 7, posto n = 3, e la curva ha tre ventri. Generalmente

valmente la curva è fornita del numero n di ventri, ad ogni volta che il mentovato arco si agguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9, &c. $2n+1$, abbiamo $y = 0$.

Quindi scoprivamo il punto di quiete, o nodo più vicino al punto A, ponendo nella formola (16.) Arco Rag. C Tang. $p = \frac{3bC}{c}$, onde si abbia $\frac{bC}{c} + \frac{C}{H} - \frac{C}{q} = \frac{3bC}{c}$, e fatti i dovuti calcoli, $q = H + \frac{2bH^2}{cC - 2bH} =$ $H + \frac{HL}{n \cdot \overline{H+L} - L}$, sostituendo in vece di C il suo valore somministrato dalla formola (15.) $C = \frac{2nb}{cL} \cdot \overline{H^2 + HL}$.

L'equazione $\frac{bC}{c} + \frac{C}{H} - \frac{C}{q} = \frac{5bC}{c}$ serve a scoprire la distanza del secondo nodo dal punto B, dandoci $q = H + \frac{4bH^2}{cC - 4bH} = H + \frac{2HL}{n \cdot \overline{H+L} - 2L}$.

Il terzo nodo si allontanava dal punto B per la misura $q = H + \frac{6bH^2}{cC - 6bH}$ $= H + \frac{3HL}{n \cdot \overline{H+L} - 3L}$.

Dal proseguimento della serie viene determinata la distanza dell' ultimo nodo n dal punto B, cioè $BA' = H + \frac{nHL}{n \cdot \overline{H+L} - nL} = H + L$.

Giacchè $BA = H$, le lontananze dei nodi dal punto A ci sono manifestate dalla seguente progressione

$$\frac{HL}{n \cdot \overline{H+L} - L}$$

$\frac{HL}{n.\overline{H+L}-L}$, $\frac{2HL}{n.\overline{H+L}-2L}$, $\frac{3HL}{n.\overline{H+L}-3L}$ &c.

$\frac{nHL}{n.\overline{H+L}-nL} = L$.

Trovare il tempo di una vibrazione della corda, la cui grossezza $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$

XIII. Dalle due formole (9.) $g = \frac{aPHG^2}{M} : \frac{3H^2L+3HL^2+L^3}{3.\overline{H+L}^3}$; (14.) $g = \frac{c^2L^2H^2G^2}{4n^2b^2.\overline{H+L}^2}$ si deduce il valore della costante $a = \frac{c^2}{4n^2b^2}.\frac{LM}{P}.\frac{3H^2+3HL}{3H^2+3HL+L^2}$ (17.)

Posto $H = \infty$, la grossezza $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$ della corda diviene costante, ed $= G^2$. In tal circostanza pertanto $a = \frac{c^2}{4n^2b^2}.\frac{LM}{P}$; siccome realmente richiedono le corde egualmente grosse.

Al numero VIII. ho dimostrato, che sendo come nel nostro caso $\frac{y}{a}$ la forza acceleratrice, segue una vibrazione nel tempo $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ misurato in secondi, esprimendo k un secondo, ed h la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo. Per la qual cosa in riguardo alla nostra corda $t = \frac{kc}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Ph}.\frac{3H^2+3HL}{3H^2+3HL+L^2}}$ (18.)

Tre formole corollarj, che potrei

dedurre

d'esse vedi, mi disnoi guardi a due della stessa corda, la cui grossezza $\frac{G^2 H^4}{H+x^4}$, sieno tali, che si conformano a spiralità di numeri 1, 2, 3, 4; essa oscillerà in tempi, che saranno come 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. proprietà, che alla corda ugualmente grossa altresì compete.

La corde simili daggiamo avere le grossezze analoghe, come L^2; e poiché pel num. IX. la massima grossezza si agguaglia a G^2, sarà G proporzionale ad L, e la stessa parimente dee avverarsi di H, ondè il volume $V = G^2 H \cdot \frac{3H^2L+3HL^2+L^3}{3 \cdot \overline{H+L}^3}$ acquista la proporzione di L^3, come richiedono i corpi simili. Avremo dunque, attribuito ad n lo stesso valore, t come $\sqrt{\frac{LM}{P}}$. Che se in oltre le corde siano formate dalla medesima materia, di modo che la massa M sia come L^3, e di più la forza tendente P ricava la ragione della grossezza analoghe, e sia come G^2, o come L^2, scopriremo il tempo t come L, la qual legge è comune a tutti i corpi simili della stessa materia, ed ugualmente elastici in siti analoghi.

XIV. Se alla grossezza della corda si appropriasse l'espressione $\frac{G^2 C^4}{C-x^4}$, ~~si ritrova~~ ~~ricavando~~ ~~il volume~~ parmi, che essa ascenda ~~della~~ all'infinito

$+V = \frac{G^2 \cdot \overline{H+L} \cdot \overline{3H^2L+3HL^2+L^3}}{3H^3}$,

$g = \frac{aP}{M} \cdot \frac{G^2 \cdot \overline{H+L} \cdot \overline{3H^2L+3HL^2+L^3}}{3H^3}$

$= \frac{c^2 G^2 L^2 \cdot \overline{H+L}^2}{4n^2 b^2 H^2}$, e quindi

$a = \frac{c^2}{4n^2b^2} \cdot \frac{LM}{P} \cdot \frac{\overline{3H^2+3HL}}{3H^2+3HL+L^2}$,

valore uguale a quello, che si è scoperto, quando alla corda compete la grossezza $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$. Per la qual cosa essendo il tempo di una vibrazione $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ pel num.° VIII., le due corde, le cui grossezze $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$, $\frac{G^2 \cdot \overline{H+L}^4}{\overline{H+x}^4}$ oscilleranno unisone, ed anche l'ultima corda si potrà vibrare &c

~~Tutta [illegible]~~ dentro i limiti della lunghezza L ~~[illegible]~~ infinito, cioè a dire, ~~[illegible]~~ ~~[illegible] dovendo essere positivo, [illegible]~~, che sia $e > L$. Facciasi dunque $e - L = H$, $e - s = H + x$, e per conseguenza $e - H = L = s + x$, onde corrisponde $s = 0$ ad $x = L$, $x = 0$ ad $s = L$. Sarà pertanto la grossezza della corda $\frac{G^2 e^4}{\overline{e-s}^4} = \frac{G^2 \cdot \overline{H+L}^4}{\overline{H+x}^4}$. Collo stesso metodo posto in opera rispettivamente alla grossezza $\frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$ si ~~[illegible]~~ verrà che la corda, ~~[illegible]~~ $\frac{G^2 e^4}{\overline{e-s}^4} = \frac{G^2 \cdot \overline{H+L}^4}{\overline{H+x}^4}$ si ~~potrà~~ vibrare in tempi proporzionali ad $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c., secondochè la figura, a cui si adatta, sono fornita di ventri 1, 2, 3, 4, &c.

Esempio II.

Determinare la curva, in cui si ripiega nell'oscillare la corda fornita della grossezza $\frac{G^2H^2}{\overline{H+x}^2}$.

XV. Venga proposto di trovare la curva, in cui si ripiega una corda fornita della grossezza $\frac{G^2H^2}{\overline{H+x}^2}$. La formula $\int \frac{G^2H^2dx}{\overline{H+x}^2}$ ci dà il volume della corda relativo all'assissa x uguale

uguale a $G^2H - \frac{G^2H^2}{H+x} = \frac{G^2Hx}{H+x}$. Ho aggiunta la costante opportuna, onde il detto volume si annulli posta $x = 0$, e fatta $x = L$, trovo $V = \frac{G^2HL}{H+L}$ (19.) volume intero della nostra corda. Questo valore si sostituisca nella formola (2.) $\frac{aVP}{M} = g$, e ne risulterà

$g = \frac{aPG^2HL}{M.\overline{H+L}}$ (20.)

Nella formola (5.) sostituisco $\frac{G^2H^2}{\overline{H+x}^2}$ in cambio di φx, ed ho $-g\,dz$
$-gz^2dx = \frac{G^2H^2dx}{\overline{H+x}^2}$: Pongo $H+x = y$, e mi si affaccia l'equazione $-g\,dz$
$-gz^2dy = \frac{G^2H^2dy}{y^2}$. Otterremo la separazione delle variabili, mettendo $z = -\frac{G^2H}{py}$. Questa formola ci mostra a dito, che a z positiva dee corrispondervi p negativa, e al contrario. Prese le differenze, avremo $dz = G^2H.\frac{pdy+ydp}{p^2y^2}$, ed effettuata la sostituzione di tali valori, troveremo dopo le convenienti operazioni $\frac{dp}{p^2+\frac{gp}{H}+gG^2} = -\frac{H}{g}.\frac{dy}{y}$,

o sia $\frac{\sqrt{gG^2-\frac{g^2}{4H^2}}.dp}{\overline{-p-\frac{g}{2H}}^2+gG^2-\frac{g^2}{4H^2}} = \frac{H}{g}\sqrt{gG^2-\frac{g^2}{4H^2}}.-\frac{dy}{y}$.

Nell'estrarre la radice del quadrato $p^2+\frac{gp}{H}+\frac{g^2}{4H^2}$ ho posto in uso il segno negativo, acciocchè a z positiva si

riferisca

riferisca p negativa: veggasi la costruzione al num.^{ro} XVIII. Faccio $gG^2 - \frac{g^2}{4H^2} = C^2$, ed ho

$$\frac{-C^2 dp}{\overline{-p-\frac{g}{2H}}^2 + C^2} = \frac{HC^2}{g} \cdot -\frac{dq}{q} \text{ (21.)},$$ ed integrando,

Arco Rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2H}} - B = \frac{HC^2}{g} \cdot \log. \frac{H^2}{q}$ (22.)

nella logistica della suttangente $= 1$ riferita al protonumero H.

XVI. Per determinare la grandezza della costante B, ho già notato al num.^{ro} X., che nel punto A (fig. 2.) esser dee $z = \infty$: Dalla formola $H + x = q$ si raccoglie, che nel sito A, dove $x = 0$, abbiamo $q = H$; e quindi nel dato sito la formola $-z = \frac{G^2 H}{pq}$ diviene $-\infty = \frac{G^2}{p}$, e mi addita dover essere $p = 0$. Scopriremo pertanto Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H} - B = \frac{HC^2}{g} \cdot \log. H = 0$, e conseguentemente $B =$ Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H}$. Sostituito questo valore, l'equazione (22.) si trasforma così Arco Rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2H}}$ $-$ Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H} = \frac{HC^2}{g} \cdot \log. \frac{H^2}{q} = \frac{HC^2}{g} \cdot - \log. q$ (23.)

Mi inoltro a stabilire la costante g. Nel punto A' abbiamo $q = H + L$, $z = \infty$, e giacchè $z = -\frac{G^2 H}{pq}$, ne risulta $\infty = \frac{-G^2 H}{p \cdot \overline{H+L}}$, il che richiede $p = 0$. Gli Archi Rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2H}}$

nei

meridiani siti A, A', nei quali $p = 0$, hanno la stessa tangente, e perciò possono differire pel numero di semicircoli espresso dalla seguente serie 1, 2, 3, 4 &c., o sia pel numero n di semicircoli, ~~espresso~~ dinotando n qualunque termine della serie predetta. Se b significhi il quadrante del raggio c, sarà $\frac{2bC}{c}$ il semicircolo del raggio C, ed i mentovati archi potranno differire per $\frac{2nbC}{c}$. E perchè avremo nel punto A' Arco Rag. C Tang. $\overline{-p - \frac{g}{2H}} =$ Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H} + \frac{2nbC}{c}$, intendendo per Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H}$ quello, che compare al punto A, e quindi

Arco Rag. C Tang. $\overline{-p - \frac{g}{2H}}$ − Arco Rag. C Tang. $-\frac{g}{2H}$ $= \frac{2nbC}{c} = \frac{HC^2}{g} \cdot \log. \frac{H^2}{H+h}$. Dividendo per C, moltiplicando per g, ed alzando al quadrato, trovo

$\frac{4n^2b^2g^2}{c^2H^2} = C^2 \cdot \log. \frac{H^2}{H+h}$, e sostituendo in luogo di C^2 il suo valore, $\frac{4n^2b^2g^2}{c^2H^2} = g\overline{G^2 - \frac{g}{4H^2}} \cdot \log. \overline{\frac{H^2}{H+h}}$; equazione, da cui si raccoglie

$$g = \frac{G^2H^2 \cdot \log. \frac{H^2}{H+h}}{\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log. \overline{\frac{H^2}{H+h}}^2} \quad (24.)$$

Questa ~~ms [illegible] si ridurrebbe~~ ~~$g = \frac{G^2H^2 \log \frac{H^2}{H+h}}{4n^2b^2}$~~ se posto $H = \infty$, onde la grossezza della corda $\frac{G^2H^2}{H+x} = G^2$ divenga

differenza costante; e $\log\frac{H^2}{H+L}$ si ugua=gli ad $\frac{L}{H}$, si scoprirebbe $g=\frac{c^2L^2G^2}{4n^2b^2}$, qualmente esigono le corde costantemente grosse:

XVII. Sia (fig. 3.) $BA=H$, $AA'=L$, e col mezzo della formola $\frac{2mbC}{c}=\frac{HC^2}{g}\cdot\log\frac{H^2}{g}$ si stabiliranno le distanze dai nodi, o punti in quiete dal punto B, le quali convengono ai varj valori di n. Quando $m=0$, esser dee $\log\frac{H^2}{g}=0=\log.H$, e per conseguenza $g=H=BA$, il che determina il punto A. Si metta poscia m uguale a 1, 2, 3, &c. n, e si scopriranno le distanze dal punto B dei nodi 1, 2, 3, &c. n, e quest'ultima lontananza sarà $=BA'=H+L$. Dividendo per C, ne risulta $\frac{2mb}{c}=\frac{HC}{g}\log\frac{H^2}{g}$: ma $C=\sqrt{gG^2-\frac{g^2}{4H^2}}$; dunque $\frac{2mb}{c}=H\sqrt{\frac{G^2}{g}-\frac{1}{4H^2}}\cdot\log\frac{H^2}{g}$, e sostituito in cambio di g il suo valore,

$$\frac{2mb}{c}=\sqrt{\frac{\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log\frac{H^2}{H+L}^2-\frac{1}{4}}{\log\frac{H^2}{H+L}^2}}\cdot\log\frac{H^2}{g}$$

$$=\frac{2nb}{c\log\frac{H^2}{H+L}}\cdot\log\frac{H^2}{g},$$ e per conseguenza

$\frac{m}{n}\log\frac{H^2}{H+L}=\log\frac{H^2}{g}$: e perché $\log\frac{H^2}{H+L}=-\log.H+L$, $\log\frac{H^2}{g}=-\log.g$, avremo

$\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n} \log. \overline{H+L} = \log. g$.

Questa formola mi insegna doversi dividere $\log. \overline{H+L}$ in tante parti, quante unità si contengono in n, e prenderne poi 1, 2, 3 &c. n di queste parti per avere il $\log. g$. Ho già detto, che se $m = o$, abbiamo $g = H$; se $m = n$, abbiamo $g = H+L$. Gli altri valori di g costituiranno il numero $n-1$ di medie proporzionali fra H, e $H+L$. Ecco dunque i valori di g, ai quali corrispondono i nodi $H = H^{\frac{n}{n}} . \overline{H+L}^{o}$, $H^{\frac{n-1}{n}} . \overline{H+L}^{\frac{1}{n}}$, $H^{\frac{n-2}{n}} . \overline{H+L}^{\frac{2}{n}}$, &c. $H^{\frac{n-n}{n}} . \overline{H+L}^{\frac{n}{n}} = H+L$.

Si avranno le distanze dei nodi dal punto A, sottraendo dai sovrapposti valori di g la quantità H.

XVIII. Ora mi accingo a dare la costruzione di una delle curve, a cui si accomoda oscillando la nostra corda, e scelgo quella, ch'è di due ventri fornita. Nella retta AB (fig. 3.) taglio $A'A = L$, $AB = H$, $BS = \sqrt{H^2 + HL}$, $BL = LB' = C = \sqrt{gG^2 - \frac{g}{4H^2}}$, e poscia per i punti B, A, S, A' conduco le normali all'infinito prolungate MBM', QAX, QSQ, $A'Q'$. Sia ADRP la logaritmica della suttangente $\frac{HC^2}{g} = HG^2 - \frac{g}{4H}$ $= \frac{16n^2b^2HG^2}{16n^2b^2 + c\log.\frac{H^2}{H+L}^2}$, $BA = H$ il primo numero, $BK = g$ i numeri, e KD i logaritmi

ritmi. Se $-\log q$ esprima il logaritmo nella logistica dalla sottangente $= 1$, avremo $KD = \frac{HC^n}{S} - \log. q$... Segue $BH = -\frac{q}{2H}$, e tiro la secante LNH, che determina l'arco corrispondente BN. Faccio poscia l'arco $NI = KD$, e condotta la secante LIT, mi insegna la formola (23.) Arco Rag. C Tang. $\frac{-q}{2H} - p$ $-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{-q}{2H} = \frac{HC^n}{S} - \log. q$, essere $HT = -p$ ... [illegible]

Rese note con tal mezzo le linee corrispondenti $BK = q$, $HT = p$, dalla equazione $z = -\frac{G^n H}{pq}$ raccolgo il valore relativo di z, a cui si agguagli la linea $KG = z$. Mi è dunque concesso di descrivere la curva $QGCG'Q'$, $2Q2G2C2G'2Q'$, le cui coordinate $BK = q$, $KG = z$. Se come suppongo $n = 2$, la nostra curva è composta di quattro rami, cioè dai rami $2n$, QGC, $CG'Q'$, $2Q2G2C$, $2C2G'2Q'$, ai quali servono di assintoti le linee AQ, SQ', $S2Q$, $A2Q'$. I punti C, $2C$ ove $z = 0$ si stabiliscono riflettendo, che giusta l'equazione $z = -\frac{G^n H}{pq}$, a $\pm z = 0$ dee riferirsi $\pm p = \infty$. Nella supposizione di $n = 2$ ciò succede, quando

Arco Rag. C Tang. $\frac{-q}{2H} - p$ $-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{-q}{2H}$

$=$

$$=\begin{cases} NO' = \frac{b.C}{c} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{-g}{2H} \\ NO'B'O = \frac{3bC}{c} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{-g}{2H} \end{cases}$$

Fatta dunque $AX = NO'$, $A2X = NO'B'O$, e condotte le linee XR, $2X2R$ parallele ad AA', che taglino la logistica ADP nei punti R, $2R$, e tirate RC, $2R2C$ normali ad AA', nei punti C, $2C$ sarà $z = 0$.

Perchè l'aja $CGK = \int -2dg = v = \log. y$ nella logistica della suttangente $= t$, e preso c come protonumero, il numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti corrisponde al logaritmo CKG, si agguaglierà alla ordinata $KQ = y$ della curva $AQ7S2TA'$, in cui si rispiega la nostra corda, qualora $n = 2$. Ai punti C, $2C$ compete l'ordinata massima $C7 = c$, $2C27 = -c$, perchè in essi l'aja $CKG = \int -2dg = v = \log. y = \log. c = 0$. Nei punti A, S, A' $\int -2dg = \infty$ positivo, o negativo, e perciò $y = 0$.

~~XVIII~~. Trovare il tempo, nel quale si vibra la corda, la cui grossezza $= \frac{GH^2}{\overline{H+x}^2}$.

XIX. Dal paragone delle due formole (20.) $g = \frac{aPG^2HL}{M.\overline{H+L}}$, (24.) $g = \frac{G^2H^2.\log.\overline{\frac{H}{H+L}}^2}{\frac{4\pi^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{\frac{H^2}{H+L}}^2}$ si deduce $a = \frac{M.\overline{H^2+HL}.\log.\overline{\frac{H}{H+L}}^2}{PL.\frac{4\pi^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{\frac{H}{H+L}}^2}$ (25.).

a

e conciossiachè per la formola (7.) $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si scopre vibrarsi la nostra corda nel tempo

$$t = k\sqrt{\frac{M.H^2+HL.\log.\frac{H^2}{H+L}}{hPL.\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\frac{H^2}{H+L}}} \; ([illegible]).$$

~~Quando n = ∞, ne risulta~~
~~$t = \frac{kc}{2nb}\sqrt{M.H^2+HL.\log.\overline{H+L}}$~~

ovvero ponendo $\log.\overline{H+L}^2$ in vece di $\log.\frac{H^2}{H+L}$,

$$t = k\sqrt{\frac{M.H^2+HL.\log.\overline{H+L}^2}{hPL.\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{H+L}^2}} \; (20.)$$

Quando $n = \infty$, ne risulta

$$t = \frac{kc}{2nb}\sqrt{\frac{M.H^2+HL.\log.\overline{H+L}^2}{hPL}} \; \text{ovvero}$$

Che se fosse $H = \infty$, la corda sarebbe fornita della grossezza costante $\frac{G^2H^2}{\overline{H+x}^2} = G^2$, e $\log.\overline{H+L}^2$ si eguaglierebbe ad $\frac{L^2}{H^2}$. Sostituito questo valore, e cancellati i termini rispettivamente nulli, la formola (20.) prende il seguente aspetto adattato alla corda ugualmente grossa $t = \frac{kc}{2nb}\sqrt{\frac{ML}{hP}}$.

Una conseguenza importante dobbiamo raccogliere dalla formola (20.), cioè che alla corda, la cui grossezza $\frac{G^2H^2}{x^2}$, non compete la proprietà, secondochè i suoi ventri sono 1, 2, 3, 4, ecc., che i tempi di una vibrazione

serbino-

serbino la proporzione delle frazioni 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. Si assegnino per esempio ad H, e ad L tali misure, onde ne provenga: $\frac{4 \cdot b^2}{c^2} = \frac{1}{4} \log. \overline{H+L}^2$, e sia $4b = \log. \overline{H+L}$, ed attribuiti ordinatamente ad n i valori 1, 2, 3, 4, &c., troveremo t proporzionale ai termini della sottoposta serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\,;\ \frac{1}{\sqrt{17}}\,;\ \frac{1}{\sqrt{26}}\ \&c.$$

che generalmente si esprimono per $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Poche sono le corde inegualmente grosse, che godano della mentovata prerogativa; e quindi non dobbiamo meravigliarci, se una corda di grossezza variabile renda un suono meno grato di quello di una corda cilindrica.

Se la nostra corda si adatterà ad una delle figure da me determinate, renderà un suono solo, e nel tempo t passerà da uno stato all'altro di quiete. Ma incitando al moto essa corda, sarebbe una combinazione assai rara, che mediante una pronta comunicazione laterale di moto, la corda si accomodasse ad una delle predette figure. Accaderà quasi sempre, che la corda si ripieghi in una curva originata dalla composizione di moltissime curve semplici, e che produca un suono misto dei suoni

confacenti

confacenti alla curva componente, e
perchè i tempi delle vibrazioni di que-
sti suoni si corrispondono in ragioni
sorde, la corda non si ridurrà mai
ad uno stato assoluto di quiete, se non
quando dalla resistenza verrà estinto
il suo moto. Nella corda cilindrica,
ed in quella dell'esempio I. ad ogni
vibrazione della corda intera, ritorna
questa allo stato di quiete; ed essendo
i suoni acuti perfettamente uniti col
suono grave, si può dire, che in certa
guisa formino un suono solo. Non così
nella corda dell'esempio II. Vi sono in
essa gli stati di quiete relativi ai suo-
ni diversi, ma non esiste mai uno
stato assoluto di quiete, e quindi si
dà un continuo contrasto fra suoni,
che si riferiscono in proporzioni assi-
metre, il quale per altro riesce poco
sensibile, perchè il suono grave del-
la corda intera copre gli acuti.

XX. Espressa la grossezza della
corda per $\frac{G^n e^2}{\overline{e-s}^2}$, si scriverà che
crescerà all'infinito dentro i confini
della lunghezza L, qualora si pon-
ga $e > L$. Ora perchè si faccia
$e - L = H$, $e - s = H + x$, e quindi
$e - H = L = s + x$, di modo che corrispon-
da $s = 0$ ad $x = L$, $x = 0$ ad $s = L$. Avre-
mo pertanto la grossezza della corda
$\frac{G^n e^2}{\overline{e-s}^2} = \frac{G^n \cdot \overline{H+L}^2}{\overline{H+x}^2}$, ed essendo ridotta
ad

ad un' espressione analoga a $\frac{G^n H^n}{\overline{H+x}^n}$, servendoci del metodo usato scopriremo, [illegible] la grossezza $\frac{G^n}{e-s} \cdot \frac{HL}{H+x}$ [illegible] proporzionali ad $\frac{}{\sqrt{n^2+1}}$.

Esempio III

Determinare la curva alla quale si conforma una corda, la cui grossezza $\frac{G^n H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$.

XXI. Cercando la curva, alla quale si adatta una corda, la cui grossezza $\frac{G^n H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$. La $\int \frac{G^n H^{\frac{4}{3}} dx}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}} = 3G^n H - \frac{3G^n H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{1}{3}}}$ che annullasi posta $x=0$, si agguaglia al volume della nostra corda corrispondente all'assissa x. Qualora $x=L$, avremo $V = 3G^n H \cdot \frac{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}}$, volume intero della corda. Sostituisco un tal valore nella formula (r.) $\frac{aVP}{M} = g$, ed ho $\frac{3aPG^n H}{M} \cdot \frac{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}} = g$ (n.b.)

Pongo nella formula (s.) $\frac{G^n H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$ in luogo di qx, ed ho $-gdz - gz^2 dx = \frac{G^n H^{\frac{4}{3}} dx}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$, e fatta $H+x = y$, $dx = dy$, ne risulta $-gdz - gz^2 dy = \frac{G^n H^{\frac{4}{3}} dy}{y^{\frac{4}{3}}}$. La sostituzione $-z = \frac{1}{v}$, onde si abbia $-dz = -\frac{dv}{v^2}$, trasforma in tal guisa la formula $-\frac{g\,dv}{v^2} - \frac{g\,dy}{v^2} = \frac{G^n H^{\frac{4}{3}} dy}{y^{\frac{4}{3}}}$. Si faccia

$V = G^n \cdot \frac{\overline{HL+L^2}}{H^n}$, $g = \frac{aPG^n}{M} \cdot \frac{\overline{HL+L^2}}{H^n}$ [illegible]

$G^n \cdot \overline{H+L} \cdot \log.\frac{H}{H+L}$

$\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log.\frac{H^2}{H+L}$

e conseguentemente

$a = M \cdot \overline{H^2+HL} \cdot \log.\frac{H^2}{H+L}$,

$PL \cdot \frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log.\frac{H^2}{H+L}$

valore uguale a quel che poteva trovarsi per la corda, supposta la grossezza $\frac{G^n H^n}{\overline{H+x}^n}$. Quindi essendo pel num. VIII. il tempo d'una vibrazione $t = \frac{kVa}{\sqrt{h}}$, le due corde le cui grossezze $\frac{G^n H^n}{\overline{H+x}^n}$, $\frac{G^n HL}{H+x}$, oscillerranno unisone, purchè ai M, H, L, n si assegnino le stesse grandezze.

Se le due corde fossero della stessa materia, onde le masse avessero la proporzione dei volumi, i tempi delle vibrazioni starebbero in ragione dimezzata dei volumi, cioè direttamente come $G\sqrt{\frac{HL}{H+L}} : G\sqrt{\frac{HL+L^2}{H}}$ o sia come $H : H+L$.

* Fatta la riflessione, che $3\cdot q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ è sempre quantità positiva quando $q > H$, s'inferisca dover esser tale di omogeneo di comparazione, il che necessariamente richiede che nel nostro caso si considerino come positivi gli archi, che si riferiscono alle tangenti da principio negative. E perchè gli archi relativi alle tangenti da principio negative, che si pren~~dono in riflessione~~ ~~di Arco Rag. C Tang. p~~ ~~ed Arco Rag. C Tang. p~~, ~~Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$~~ ~~Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$~~, ~~integrale~~ ~~di cui fa uso~~ ~~$3q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$~~ ~~Arco Rag. C Tang. p~~ ~~− Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ (31.)~~ sono in qualità di positivi, si uguagliano agli archi positivi, che corrispondono ad eguali tangenti, che nella loro origine son positive; io in seguito mi servirò della formola $3\cdot q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ (31.); perchè nella conseguenza si accorda con quella, che dall'analisi mi viene somministrata.

faccia $-\frac{1}{z} = v = -\frac{g q^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ (29.), e dopo le necessarie operazioni si giungeva alla formola $\frac{G^2H^{\frac{4}{3}}p^2dq}{g\cdot q^{\frac{2}{3}}} + \frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = -dp$, o sia all'equivalente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{-dp}{\frac{G^2H^{\frac{4}{3}}p^2}{g}+1}$, che può prendere altresì l'aspetto seguente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}}\cdot\frac{-dp}{\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}}+p^2}$.

Ponga $\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} = C^2$ (30.), ed integrando mi si presenta $B + 3q^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C Tang. p.

XXII. Determineremo il valore della costante B riflettendo, che dovendo essere per noi x. z = ∞ nel punto A (fig. 1.), avremo in detto sito $v = -\frac{1}{z} = 0$: ma $v = -\frac{g q^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ (29.); dunque $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, e giacchè nel mentovato punto $q = H$, sarà $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{5}{3}}} = \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Quindi B = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} - 3H^{\frac{1}{3}}$, e perciò il vero integrale sarà $3\cdot q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ ~~(31.)~~*

Passo a stabilire la grandezza della costante g. In riguardo al punto A abbiamo Arco Rag. C Tang. p − Arco Ragg. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} = 0$. Rispettivamente al punto A', in cui esser dee

v

$x = -\frac{1}{2} = 0$, si avrà l'equazione
$p = \frac{g}{3G^2 H^{\frac{2}{3}} \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}} = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}}$ dedotta dalla
formola (eq.), ponendo in essa in cambio di y il suo valore $H+h$; laonde
Arco Rag. C Tang. p = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}}$
Col raggio $LB = C = \frac{Vg}{GH^{\frac{2}{3}}}$ (fig. 4.) descrivasi il circolo $BOB'OB$, e condotta al punto B la secante MBM' si taglino $BH = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}}$, $BR = \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$, e si tirino le secanti HL, RL, che determinino gli archi BN, BI. Il semicircolo del raggio C si uguaglia a $\frac{2bC}{c}$, e nel punto A' (fig. 1, a 4.) deve adempiarsi la formola
Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}} = BN + \frac{2nbC}{c} = BNOB'OBN = BN + NOB'OBN$,
posto che sia $n = 2$.
Conseguentemente
Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$
$= \frac{2nbC}{c} + BN - BI = \frac{2nbC}{c} - NI$. Sia
$NI = \frac{2bC}{Nc}$, e nel nominato punto A'
avremo $3 \cdot \overline{\overline{H+h}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} = \frac{2bC}{c} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}$
$\frac{2b}{c} \cdot \frac{Vg}{GH^{\frac{2}{3}}} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}$, da cui si deduce
$g = \frac{9c^2 \cdot G^2 H^{\frac{4}{3}} \cdot \overline{\overline{H+h}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2 \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^2}$ (32.)

Fingasi $H = \infty$, ed in tal circostanza sarà $\overline{H+h}^{\frac{1}{3}} = H^{\frac{1}{3}} + \frac{h}{3H^{\frac{2}{3}}}$.
oltre l'arco NI = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$
− Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+h}^{\frac{1}{3}}}$ riuscirà minimo,
e per conseguenza $\frac{1}{N} = 0$ per l'equazione.

Per

Per la qual cosa scopriremo $g = \frac{c^2 L^2 G^2}{4n^2 b^2}$ qualmente richieda la corda di grossezza costante G^2, a cui si agguaglia nella ipotesi di $H = \infty$ la grossezza $\frac{G^2 H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$.

Se H è finita, ed $n = \infty$, ci si presenterà $g = \frac{g c^2}{4n^2 b^2} \cdot G^2 H^{\frac{4}{3}} . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$.

XXIII. Diamo un saggio della maniera di ridurre a computo il raggio $LA = C$, e collo stesso incontro anche l'arco $N1 = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C}{3 H^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C}{3 . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}}} = \frac{n b C}{N\circ}$. Prima di ogni altra cosa avverto, che l'equazione $\frac{n b C}{c} + \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C}{3 . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C}{3 H^{\frac{1}{3}}} = 3 . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ si può esprimere così

$\frac{n b}{c} + \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 H^{\frac{1}{3}}} . C = 3 . \overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$.

Sia $H+L = 8$, $H = 1$, e giacchè $\frac{nb}{c} = \frac{355}{113} = 3,1415929$, avremo nella ipotesi di $n = 1$ $\overline{3,1415929 + A.R.1 T\frac{C}{6} - A.R.1 T\frac{C}{3}} . C = 3$. Agevolmente si scopre dover essere a un di presso $C = 1$. Col mezzo frattanto delle attentazione ne determineremo il preciso valore, cioè $C = 1,0052770$, onde si abbia $\frac{C}{3} = 0,3350910$; $\frac{C}{6} = 0,1675455$.

Che

perchè questo valore di C sia veramente determinato, si rende manifesto col seguente computo. Impariamo dalla Tavola, che

l'arco di g.di 18 min. 32 ha la tang. = 3352424.
l'arco di g.di 18 min. 31 ha la tang. = 3349188
Differenza delle predette tangenti = 3236
La minore di esse tangenti si sottrae dalla tangente $\frac{C}{3}$, e si troverà 3350910
3349188
la loro differenza = 1722

Quindi, come può facilmente dimostrarsi, considerando confondersi colla linea retta l'arco di un minuto, ne risulta essere

Arco Tang. 3350910 = g.di 18 min. 31 $\frac{1722}{3236}$
= g.di 18 min. 31, 5321.

Ci insegnano la Tavola stessa, che

l'arco di g.di 9 min. 31 ha la tang. = 1676416
l'arco di g.di 9 min. 30 ha la tang. = 1673426
Differenza delle predette tangenti = 2990
Sottro la minore di esse tangenti dalla tangente $\frac{C}{6}$, e scopro 1675455
1673426
la loro differenza = 2029

Avremo pertanto

Arco Tang. 1675455 = g.di 9 min. 30 $\frac{2029}{2990}$
= g.di 9 min. 30, 6786.

Gli archi trovati sono

B1 = g.di 18 min. 31, 5321
BN = g.di 9 min. 30, 6786, laonde
N1 = g.di 9 min. 00, 8535 = min. 540, 8535.

essendo un semicircolo = g.di 180 = min. 10800, esprimeremo l'arco $\frac{N1}{C}$ in parti del raggio = 1 mediante l'analogia 10800,0000 : 540,8535 ::

$= 3{,}1415929 = \frac{ab}{c}$; $0{,}1573279$
$= \frac{NP}{C}$. Perciò

$\overline{3{,}1415929 - 0{,}1573279} : 1{,}0052730$
$= 3$, e per conseguenza
$2{,}9842650 : 1{,}0052730 = 3$,
e finalmente $3 = 3$ ciò che prova essere l'equazione fisicamente giusta.

Avendo stabilito al num.° XXII.
$NP^2 = \frac{abC}{NC}$, ne segue essere $\frac{NP}{C} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{1}{N}$
$= 3{,}1415929 \cdot \frac{1}{N}$: come poco fa ho scoperto $\frac{NP}{C} = 0{,}1573279$; dunque
$\frac{1}{N} = \frac{1573279}{31415929}$ nella ipotesi di
$H = 1$, $H+L = 8$, e di $n = 1$.

Suppongasi ora $n = 2$, e ci si presenterà l'equazione
$\overline{6{,}2831858 + A.R.1\,T.\frac{C}{6}} - \overline{A.R.1\,T.\frac{C}{3}} \cdot C$
$= 3$. In questo incontro deve C poco allontanarsi da $\frac{1}{2}$. Usando adunque il metodo dell'attenzione troveremo
$C = 0{,}4835754$, e conseguentemente
$\frac{C}{3} = 0{,}1611918$, $\frac{C}{6} = 0{,}0805959$.
Il calcolo, che segue dimostra l'esattezza dello stabilito valore di C.

L'arco di gr. 9 min. 10 ha la tang. $= 1613677$
L'arco di gr. 9 min. 9 ha la tang. $= 1610692$
Differenza delle predette tangenti $= 2985$
La più picciola di esse tangenti la sottro dalla tangente $\frac{C}{3} = 1611918$
1610692
e trovo la loro differenza $= 1226$

Avremo

Avremo pertanto Arco Tang. 1611918 =
g^{di} 9 min. 9 $\frac{12206}{29485}$ = g^{di} 9 min. 9,4107.

Inoltre
l'arco di g^{di} 4 min. 37 ha la tang. = 807509
l'arco di g^{di} 4 min. 36 ha la tang. = 804581
Differenza delle predette tangenti = 2928
Sottro la più piccola di esse tangenti
dalla tangente $\frac{c}{6}$ = 805959
804581
e scopro la loro differenza = 1378
Per la qual cosa Arco Tang. 805959 =
g^{di} 4 min. 36 $\frac{1378}{2928}$ = g^{di} 4 min. 36,4706

Gli archi trovati sono, posto n=2,
BI = g^{di} 9 min. 9,4107
BN = g^{di} 4 min. 36,4706, e quindi
NI = g^{di} 4 min. 32,9401 = min. 272,9401.
Si esprimerà quest'arco pel raggio = 1
col mezzo dell'analogia 10800,0000
: 272,9401 :: 3,1415929 = $\frac{2b}{c}$:
0,0793951 = $\frac{NI}{C}$. Perciò
6,2831853 − 0,0793951 · 0,4835754
= 3 ovvero
6,2037902 · 0,4835754 = 3;
ed in fatti effettuando la moltiplicazione
si scopre 3,0000006 = 3, equa-
zione adequatamente vera.
Giacchè pel num.ro XXII. NI = $\frac{2bC}{Nc}$,
avremo $\frac{NI}{C}$ = $\frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{N}$ = 3,1415929 · $\frac{1}{N}$:
ma qualmente ho testè provato nella
supposizione di n=2, $\frac{NI}{C}$ = 0,0793951;
dunque $\frac{1}{N}$ = $\frac{0,0793951}{3,1415929}$

Posto n=3, sarà C = 0,3201102,

$\frac{NI}{C}$

$\frac{NI}{C} = 0{,}05300021$, $\frac{1}{N} = \frac{2053000021}{314159279}$

e quando $n=2$ si scopriva

$C = 0{,}2394906$, $\frac{NI}{C} = 0{,}03976773$,

$\frac{1}{N} = \frac{3977673}{3141592\,9}$.

XXIV. Per determinare i nodi, o punti di quiete, secondochè la corda si ripiega in curva fornita di ventri 2, 3, 4, &c. eccone l'artifizio. Avendo per mano la formola (31.) $3\cdot\overline{g}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$, ed essendo per le formole (30.) e (32.) $C^2 = \frac{g}{G^2 H^{\frac{4}{3}}} = \frac{9c^2\cdot\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{4b^2\,\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$, abbiamo

$C = \frac{3c\cdot\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{2b\,\overline{n-\frac{1}{N}}}$ (33.); $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} =$

$\frac{3c^2\cdot\overline{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2\,H^{\frac{1}{3}}\,\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$. In oltre $\frac{C^2}{3\cdot\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}} = \frac{3c^2\cdot\overline{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2\,\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}\,\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$

Rispettivamente al punto A' la nostra formola si modifica così $3\cdot\overline{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3\cdot\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ $= \frac{2nbC}{c} + BN - BI$. L'aggregato di questi archi nella ipotesi di $n=2$ si agguaglia ad IOBO'BN.

Trovato il raggio C col metodo del num. precedente, si faccia $3g^{\frac{1}{3}} - 3H^{\frac{1}{3}} = Q$, o sia $27g = \overline{Q+3H^{\frac{1}{3}}}^3$. Questa equazione è alla prima parabola cubica, e si costruisca così. Sia (fig. 5.) BDIG la nostra parabola cubica, in cui all'ascissa $BA = H$

corrispondevà

corrisponderà l'ordinata $AP = 3H^{\frac{1}{3}}$.
Tirata PD parallela all'asse BA',
sarà BK = q, AK = PQ = x; QQ = Q
$= 3q^{\frac{1}{3}} - 3H^{\frac{1}{3}}$; e posto q = BA' = H+d;
avremo $DG = Q = 3\overline{H+d}^{\frac{1}{3}} - 3H^{\frac{1}{3}}$.

L'arco (fig. 4.) QQ si faccia
uguale all'ordinata (fig. 5.) QQ =
$3q^{\frac{1}{3}} - 3H^{\frac{1}{3}}$, e chiaro si scopra, che a
BK = q si riferirà (fig. 4.) BQ = p.
Egli è dunque in mia potestà il
descrivere la curva (fig. 5.) AQN,
la cui coordinate BK = q, KQ = p
A q = H = BA corrisponda AA = p
= ~~CO~~ ... e quando QM si agguaglia
all'arco QO della fig. 4. di modo chè
BQO sia ~~un~~ quadrante, la tangente
(fig. 5.) CN = p diviene infinita; e
quindi si determina il relativo valore
di q = BC, a cui si riferisca nella cur=
va, alla quale si può adattare la nos=
tra corda, la massima grandezza dell'
ordinata y = a, come vedremo nella
costruzione di essa curva. Si cangia
poscia la tangente in infinita ~~negativa~~ ~~posi~~= nega=
tiva CN, ed indi si annulla, qualora
r.v. si agguaglia (fig. 4.) all'arco QQOB.
Dopo ciò la mentovata tangente torna positiva
~~positiva~~ negativa, e giunge all'infinito, quan=
do rQ ~~a~~ M pareggia (fig. 4) QQOBO.
Il numero dei rami infiniti dalla
parte, dalle ordinate ~~positive~~ ~~p~~ negative positive, cioè
AQN, LQQN ecc. si agguaglia ad n.
La figura 5. è adattata ad n = 2.

Altrettanti

Altrettanti sono i rami infiniti dalla parte dalla ordinata ~~negativa~~ negapositiva. Si termina finalmente con una porzione di ramo ~~positivo~~ positivo ~~negativo~~ a LH, che taglia la tangente $A'H = p = \frac{-C^2}{3 \cdot \overline{H+L}^{\frac{1}{3}}}$, eguale alla tangente BH della fig. 4, la qual tangente corrisponde a $q = BA' = H+L$ (fig. 5.)

Ho di sopra notato al num.ro XXII. che in riguardo ai nodi, o punti stabili esser dee $\frac{q}{3C^2H^{\frac{2}{3}}} = q^{\frac{1}{3}}p$, o sia $\frac{C^2}{3} = q^{\frac{1}{3}}p$. Fra gli assintoti bB, BA' si delinei l'iperbola bKzH corrispondente alla predetta equazione, la qual iperbola passerà pei punti K, H. Taglierà essa nei punti Z &c. i rami ~~positivi~~ posi negativi per esempio LZaN situati fra il primo KaN, e l'ultimo aLH, ed il numero dei punti di intersezione s'agguaglierà a quello dei rami intermezzi, cioè ad n-1. Nella fig. 5. abbiamo un solo ramo medio, ed una sola intersezione; perchè supponendosi n=2, è n-1=1. Dai punti Z &c. passino le ordinate SZYg &c., ed S &c. saranno i nodi o punti stabili, che rimarranno in quiete, quando la corda oscillerà scompartita nel numero dei ventri n.

XXV. Riduremo a computo la linea BS &c. ricorrendo nuovamente alla tavola degli archi riferiti alla tangenti.

tangenti. Giacchè rispettivamente ai nodi essendo $\frac{C^2}{3} = q^{\frac{1}{3}}p$, avremo $p = \frac{C^2}{3 \cdot q^{\frac{1}{3}}}$. Sostituito questo valore in cambio di p nella formola (31.), avremo

$3 \cdot q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot q^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot H^{\frac{1}{3}}}$

= Arco Rag. 1 Tang. $\frac{C}{3 q^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. 1 Tang. $\frac{C}{3 H^{\frac{1}{3}}}$. C

Sia come al num.ro XXIII. $H+L=4$, $H=1$, ed attenendomi alla fig. 6 composta di due ventri, che suppone $n=2$, vado in traccia della distanza $BS = q$ dal punto B dello unico nodo S. Nella detta ipotesi ho già stabilito $C = 2,4483815$. Col mezzo di saggi numerici egli è d'uopo assegnare a q il competente valore, onde si avverò la sopraposta equazione, il che ottenuto, sarà il detto valore $= BS$, e si agguaglierà alla lontananza del nodo dal punto B.

Ho dunque dopo molte prove trovato $q^{\frac{1}{3}} = 1,4979172$, e conseguentemente

$q = 3,3609606122159772968446$.

Ecco come ciò si dimostra. E primieramente $3 \cdot q^{\frac{1}{3}} - 3 H^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 1,4979172 - 3 = 1,4937516$

Caviamo adesso il valore di

Arco Rag. 1 Tang. $\frac{C}{3 q^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. 1 Tang. $\frac{C}{3 H^{\frac{1}{3}}}$. C.

La tang. $\frac{C}{3 q^{\frac{1}{3}}} = \frac{0,45357554}{4,4937516} = 0,10761061$.

Mi insegnano le tavole, che

l'arco di g.^{di} 6 min. 9 ha la tang. 10.77519
l'arco di g.^{di} 6 min. 8 ha la tang. 10.74576
Differenza delle predette tangenti = 2943.
Sottro la minore di esse tangenti dalla
tangente $\frac{c}{3\frac{2}{3}}$, e trovo 10.76106
10.74576
la loro differenza = 1530
Si inferisce, che la tangente 10.76106.
compete all'arco di g.^{di} 6 min. 8 $\frac{1530}{2943}$
= min. 368,5199. Sia BN (fig. 4.)
uguale ad un tal arco, supposto il
raggio BA = 1. Si aggiungano ad esso
il semicircolo BNO = g.^{di} 180 =
min. 10800, e ne risulterà l'arco
BNOBN = min. 11168,5199
che serve alla determinazione del
nodo S (fig. 6.) in cui sceglier, se vero,
il punto C, a cui corrisponda il mas-
simo valore dell'ordinata y = c,
nella curva, alla quale si può acco-
modare la nostra corda, rilevandola la
tangente (fig. 4.) BE = c, che compe-
te al quadrante BO, ed incontrandosi
prima (fig. 6.) il punto C dal punto S,
ne segue che l'arco relativo a questo
punto ha da superare il quadrante,
e per conseguenza da uguagliarsi
(fig. 4.) a BNOBN.

Osservo essere la tangente

$\frac{c}{3\frac{1}{3}} = \frac{c}{3} = \frac{0,483554}{3} =$
0,161184, e che ad essa nel
n.^{ro} XXIII. compete l'arco di g.^{di} 9 min. 9,4107

=

= min. 5:49, 4102.

Gli archi noivati sono

$BNO\acute{B}N' =$ min. 111 614, 5199

$\acute{A}Q =$ min. 5:4 9, 4102, e perciò

$\acute{I}O\acute{B}N'' =$ min. 10619, 1092.

Perchè un semicircolo = g.^{di} 180 = min. 10800 = $\frac{355}{113}$ = 3,1415929.

in riguardo al raggio 1, esprimeremo l'arco $\frac{IO\acute{B}N}{C}$ in parti del raggio predetto mediante l'analogia

10800, 0000 : 10619, 1092 :: 3,1415929 : 3,0889739 = Arco $R. 2 T. \frac{C}{39^{\frac{1}{3}}} - A.R. 2 T. \frac{C}{3H^{\frac{1}{3}}} = \frac{IO\acute{B}N}{C}$,

e moltiplicando per $C = 0,4835754$,

così presenterà 3,0889739 . 0,4835754

= 1,4937514 = $A.R.C T. \frac{C^2}{39^{\frac{1}{3}}} - A.R.C T. \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$

$= IO\acute{B}N''$.

Di sopra abbiamo scoperto

$\overline{3.g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} = 1,4937561$; dunque con fisica adeguazione si adempie l'equazione $\overline{3.g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} = A.R.C T. \frac{C^2}{3g^{\frac{1}{3}}} - A.R.C T. \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$,

posta (fig. 60) $AS = g = 3,3606606$,

e per conseguenza S è il nodo cercato, quando $n = 2$.

XXVI. Agevolmente si costruirà la curva, a cui oscillando si adatta la corda del presente esempio.

Avendo già delineata la curva, che ha per coordinate (fig. 5.) $AK = g$, $KE = p$, col mezzo della formola (29.)

$-\frac{1}{2} = \frac{-qg^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + g^{\frac{4}{3}}p$ si renderà manifesta

il

il relativo valore di z, e perciò mi è concesso il descrivere la curva (fig. 6.) $QGCG'Q'$, $nQnG'nCnG'nQ$ &c., nella quale alla assissa $BK = q$ corrispondano le ordinate $KG = z$. Quando $q = BA = H$, abbiamo pel n.^{ro} XXXI. $p = \frac{S}{3G^2H^{\frac{5}{3}}}$. Sostituiti questi valori nella formola ng., si trova $-\frac{1}{z} = \frac{-S}{3G^2H} + \frac{S}{3G^2H} = 0$, e per conseguenza $z = \mp\infty = AQ$. Taglio BC, BnC uguali alla linea similmente denominata dalla fig. 5., e giacchè in tali circostanze $p = \mp\infty$, sarà per la formola (ng.) $-\frac{1}{z} = \mp\infty$, e conseguentemente $z = \mp 0$. Che se si determini BS &c. $= BS$ &c. della fig. 5., in riguardo alla qual assissa $p = \frac{S}{3G^2H^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, avremo $-\frac{1}{z} = \frac{-Sq^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + \frac{Sq^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}}$, cioè $\pm\infty = z = \begin{cases} SQ \\ SnQ \end{cases}$. Avverto, che ponendo $BK = q$ di lunghezza media fra BA, e BC, onde si abbia $q > H$, è (fig. 5.) $KE = p > AR = \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} = \frac{S}{3G^2H^{\frac{5}{3}}}$, e quindi $q^{\frac{2}{3}}p > \frac{H^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}S}{3G^2H^{\frac{5}{3}}} = \frac{Sq^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}}$. Per la formola (ng.) $-\frac{1}{z} = \frac{-Sq^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$; dunque scopriremo $-\frac{1}{z}$ uguale ad una quantità positiva, e perciò z uguale ad una quantità negativa. Ciò significa doversi prendere la z negativamente in riguardo alla p, cioè a

dire

dire per direzione contraria, come in fatti la ho determinata nella Fig. 6.

Conciossiachè pel num.^{ro} VI. $v = S - z\,dx = S - z\,dg = \log. y$ nella logistica dalla suttangente 1, e preso c come protonumero; qual numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti della predetta logistica corrisponde al logaritmo $= S - z\,dg =$ CKG, s'agguaglia all'ordinata KQ $= y$ della curva per esempio AQ7S2Q7A', alla quale si accomoda la nostra corda, quando $n = 2$. Nei punti A, S, A' l'ordinata è nulla; perchè quivi l'aja CAQ, CSQ', 2CA'2Q' è infinita, ed al logaritmo infinito corrisponde il numero $y = 0$ nel mentovato ramo delle ordinate calanti. Al contrario nei punti C, 2C $y = c$ massimo suo valore, a cagione che $S - z\,dg = 0$, ed il log. $= 0$ conviene al protonumero $= c = C7 = 2C2\,7$.

Trovare il tempo, nel quale si vibra la corda, la cui grossezza $\frac{G^2 H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$.

XXVII. Le due formole (26.) $g = \frac{3apG^2H}{M} \cdot \frac{\overline{H+z}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{\overline{H+z}^{\frac{1}{3}}}$, (32.) $g = \frac{9c^2}{4b^2} \cdot \frac{G^2 H^{\frac{4}{3}} \cdot \overline{H+z}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{\overline{n - \frac{1}{N}}^2}$ somministrano il valore di $a = \frac{3c^2}{4b^2} \cdot \frac{M \cdot \overline{H+z}^{\frac{1}{3}} \cdot H^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{H+z}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}{p \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^2}$ (33.).

e giacchè pel num.^{ro} VIII. il tempo di una vibrazione della corda $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, ne risulta

$$t = \frac{kc}{2b.\overline{n - \frac{1}{N}}}\sqrt{\frac{3M.\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}.H^{\frac{1}{3}}.\overline{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}}{hP}} \quad (34.)$$

Supposto $n = \infty$, scopriamo

$$t = \frac{kc}{2bn}\sqrt{\frac{3M.\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}.H^{\frac{1}{3}}.\overline{\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}}{hP}}$$

Se fosse $H = \infty$, e perciò $\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} = H^{\frac{1}{3}} + \frac{L}{3H^{\frac{2}{3}}}$, ed $\frac{1}{N} = 0$, poichè in tal circostanza svanisce l'area N1 (fig. 4.), si troverebbe $t = \frac{kc}{2bn}\sqrt{\frac{ML}{hP}}$, qualmente richiedono le corde ugualmente grosse. Ed in fatti la grossezza della corda $\frac{G^2H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$ sarebbe adequatamente costante, ed $= G^2$.

I tempi delle vibrazioni della stessa corda staranno come $\frac{1}{n - \frac{1}{N}}$, e conseguentemente i suoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo eguale come $n - \frac{1}{N}$. Nell'esempio del num.^{ro} XXIII., in cui si stabilisca $\overline{H+L}^{\frac{1}{3}} = 6$, $H = 1$, si avrebbe

$n = 1$, $\frac{1}{N} = \frac{1573279}{31415929}$

$n = 2$, $\frac{1}{N} = \frac{793951}{31415929}$

$n = 3$, $\frac{1}{N} = \frac{550506}{31415929}$

$n = 4$, $\frac{1}{N} = \frac{395673}{31415929}$

&c.

I suoni pertanto serbarebbero ade=
quatamente la proporzione de' se=
guenti numeri.

Valori delle Proporzioni fra i suoni

1	29442850
2	620379027
3	93 2 27 22 47
4	125266043
&c.	

I primi due suoni si corrispondono
in Ottava crescente sopra 1 : 2 per
la ragione $\frac{620379027}{596453000}$ media
fra le due $\frac{27}{26}$, $\frac{26}{25}$, cioè a dire per
un minor semituono incirca.

I suoni secondo e terzo for=
mano una Quinta, che cresce sopra
2 : 3 per la ragione $\frac{93217 2247}{62056460}$
molto prossima a $\frac{142}{141}$, che non
giunge a $\frac{7}{12}$ di Comma $\frac{81}{80}$.

Dai suoni terzo e quarto
è composta una Quarta 3 : 4, che
sovrabbonda per la proporzione
$\frac{125266043}{124957049}$, che sta di mezzo
fra $\frac{406}{405}$, e $\frac{405}{404}$ quinta parte
in circa del Comma.

Le ragioni fra i suoni quarto
e quinto, quinto e sesto, &c. si av=
vicinerebbero talmente alle ar=
monia 4 : 5, 5 : 6, &c., che l'o

orecchio

orecchio non ne discernerebbe le differenze, che diverrebbero sempre più piccole.

Consideriamo adesso la relazione fra i suoni acuti, ed il grave. Ho già detto, che i due primi suoni si riferiscono in Ottava crescente per una ragione media fra le due $\frac{27}{26}$, $\frac{26}{25}$.

La ragione fra il primo, ed il terzo suono cresce sopra 1:9 per la frazione $\frac{9\,3.2\,1\,2\,2\,47}{14\,9\,5\,2\,2\,9\,5\,5\,0}$ media fra $\frac{23}{22}$, $\frac{22}{21}$.

Più grande ancora è la differenza $\frac{5\,2\,5\,2\,6\,6\,0\,4\,3}{1\,1\,9\,3\,2\,0\,6\,0\,0}$ media fra $\frac{22}{21}$, $\frac{21}{20}$, per cui il suono grave paragonato col primo cresce sopra la doppia Ottava 1:4.

Il suono grave posto al confronto coll'acutissimo formerebbe un'armonia, che supererebbe il rapporto 1:2 per la ragione $\frac{1.5\,9\,2\,9}{2\,9\,4\,4\,2\,6\,5\,0}$ assai prossima a $\frac{20}{19}$.

Si congetturi dalla cosa detta, quanto riuscirebbe ingrata all'orecchio una tal mistura di suoni, se dal suono grave molto più vigoroso degli acuti non venisse resa poco sensibile.

Poiché la corda si acco-

modasse

medesse ad una delle curve da me determinate, renderebbe il suono ad essa figura confacente, e passerebbe da uno stato all'altro di quiete nel tempo d'una vibrazione. Ma ripiegandosi in una nuova composta da molte delle predette curve, il che succede per qualora colle maniera consueta s'incita al tremito, produrrebbe un aggregato di suoni appropriato alle curve componenti, e risvegliandosi questi in ragioni assimetre, non ritornerebbe più, parlando in rigor geometrico, e prescindendo dalle resistenze, allo stato assoluto di quiete. Si applichi alla nostra corda quello che ho scritto della corda dell'esempio II. al num. XIX. XXVIII. La grossezza della corda accettò l'espressione $\frac{G^n a^{\frac{4}{3}}}{a-s^{\frac{4}{3}}}$, e poi ischivare, che diventa infinita dentro i termini della lunghezza L, fa di mestieri che sia $a > L$. Il perchè pongasi: $a-L = H$; $a-s = H+x$, e perciò $a-H = L = s+x$, onde si riferisca $s=0$ ad $x=L$, $x=0$ ad $s=L$. Avremo dunque la grossezza della corda $\frac{G^n a^{\frac{4}{3}}}{a-s^{\frac{4}{3}}} = \frac{G^n \overline{H+L}^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$, ed essendo ridotta ad una formola analoga alla $\frac{G^n H^{\frac{4}{3}}}{\overline{H+x}^{\frac{4}{3}}}$, ne segue che la sua corda fornita della suddetta

grossezza

grossezza si vibreranno in tempi ineguali, assegnando ad M, N, L, n gli stessi valori, si corrisponderanno in ragione composta d'inegualità.

XXIX. Sinquì ho trattato di quella corda, che nel vibrarsi si adatta a curve espresse da formole differenziali, che ammettendo la separazione delle variabili, permettono che si riduca a computo il tempo delle vibrazioni della corda medesima. Si danno peraltro delle specie di corde, che quantunque si ripieghino in curve dinotate da equazioni differenziali, nelle quali non si sa sviluppare la incognita, nulladimeno si possono determinare col computo i tempi delle loro vibrazioni. La condizione, che si richiede, consiste in ciò, che le parti della corda prese da un punto estremo siano sempre simili alla corda totale. Questa circostanza si avvera in due casi, cioè quando le corde sono di figura triangolare, o conica; imperciocchè le loro parti prese dal vertice del triangolo, o dal cono serbano costantemente simiglianza col tutto. Trovato prima il tempo, in cui si vibrano le nostre corde divise in un numero infinito di parti, e dimostrando poscia, che i tempi delle vibrazioni delle

corde

corda simili stanno come una data potestà dei lati omologhi, si passa prontamente alla determinazione del tempo di una vibrazione, quando il numero dei ventri è finito.

esempio IV.

Trovare il tempo, in cui si vibra una corda di figura triangolare.

~~XXIX.~~ ~~Della corda di figura triangolare uniformemente tenuta di grossezza, allorchè sono mediocremente ricerca della legge, che regola le vibrazioni del tamburo, si cui mini=mi=gattoni sono corda triangolare.~~

XXX. Rappresenti $CenC$ (Fig. 7.) una corda triangolare. Sia $CA = L$, $ene = G$, $CK = q$, $KH = dq$, e si chiami M la massa della corda, P il peso o forza che la tende. Scopriremo il suo volume $V = \frac{GL}{2}$. Dalla similitudine dei triangoli $Cene$, $CLnL$ ne deduco l'analogia $CA : CK :: ene : LnL$

$$L : q :: G : \frac{Gq}{L},$$

che determina $LnL = \frac{Gq}{L}$. Perciò l'aja o volume $LnG = \frac{Gqdq}{L}$. La massa dell'elemento LnG si stabilisca coll'analogia $\frac{GL}{2} : M :: \frac{Gqdq}{L} : \frac{2Mqdq}{L^2}$, l'ultimo termine della quale si eguaglia alla massa cercata.

Sia $KH = dq$ una delle infinite parti, nelle quali si suppone divisa

la

la corda CarC, e potendosi considerare GrG = LrL, cioè a dire costante la grossezza delle corticelle, la cui lunghezza KH, avremo per la legge delle vibrazioni delle corde ugualmente grosse $t = \frac{c}{rb}\sqrt{\frac{2Mg\,dq^2}{L^2hD}}$ (35.) dinotando al solito t il tempo di una vibrazione espresso in secondi, $\frac{c}{rb}$ la proporzione fra il raggio e la semicirconferenza circolare, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Conciossiachè tutti gli elementi KH, nei quali è scompartita la corda, abbiano ad essere unisoni, la quantità $q^{\frac{1}{2}}dq$ dee assumersi costante. Essa dunque la $\int q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, quando $CK = q = CA = L$, dovrà essere (chiamato n il numero delle parti, nelle quali la corda è divisa) $\frac{\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{n} = q^{\frac{1}{2}}dq$; o sia $\frac{4L^3}{9n^2} = q\,dq^2$: fatta la sostituzione nella formola (35.) ne risulta $t = \frac{ck}{3nb}\sqrt{\frac{2ML}{hD}}$ (36.) tempo di una vibrazione della nostra corda divisa nel numero infinito n di parti.

XXXI. Col seguente metodo troveremo la distanza dal punto C dei nodi o linee stabili, per esempio LrL, che separano una parte dall'altra, quando $n = \infty$. Giacchè $\int q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, posto $q = L$, questa sommatoria divisa per ∞ è relativa alla distanza q del primo nodo dal punto C. Avremo

pertanto

XXXII. :: Mentre due corde triangolari simili $CLzL$, $Ceze$ della stessa materia, e grossezza, e tesa dalla medesima somma di forze si vibrano intere, o divise in pari numero di parti, deggiono adattarsi a curve della stessa natura, e possono certamente a curve simili accomodarsi. Nella formola generale spettante alle corde inegualmente grosse $\frac{VP\,ddy}{My} = \varphi q \cdot dq^2$ si sostituisca $\frac{GL}{2}$ in cambio di V, $\frac{Gq}{L}$ in cambio di φq, onde ne risulti $-\frac{aL^2P\,ddy}{2My} = q\,dq^2$, o sia $-\frac{ddy}{y} = \frac{2Mq\,dq^2}{aL^2P}$. La curva, in cui si ripiega la corda $CLzL$, sia espressa dalla formola $-\frac{ddy}{y} = \frac{2Mq\,dq^2}{aL^2P}$. Ms. insegna questa, che la quantità $-\frac{ddy}{y}$ sarà costante, quando siano tali q e dq, qualunque valore abbia y nell'atto che la corda si vibra. Un'altra corda triangolare simile $Ceze$ egualmente densa e grossa, e tesa dallo stesso peso richiederà l'equazione $-\frac{ddY}{Y} = \frac{2MQ\,dQ^2}{AL^2A}$, in cui parimente si verificherà, che supposte costanti Q e dQ, sia altresì costante $-\frac{ddY}{Y}$ assegnata ad Y dentro i limiti della quantità minima qualsivoglia grandezza

dezza. Si stabilisca $q : Q :: dq : dQ$ $:: l : L$; e perchè $m : M :: l^2 : L^2$, avremo $\frac{ddy}{y} : \frac{ddY}{Y} :: \frac{l^3}{a} : \frac{L^3}{A}$.
Se la corda si adattino a due curve simili, sarà $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, e per conseguenza $\frac{l^3}{a} = \frac{L^3}{A}$, e passando all'analogia, $a : A :: l^3 : L^3$, cioè a dire i valori delle costanti a, A come i cubi delle lunghezze CK, CA. Ora la grandezza di $\frac{ddy}{y}$, $\frac{ddY}{Y}$ non si muta al cangiarsi delle ordinate y, Y, mentre si vibrano le corde: dunque sarà sempre $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, ed $a : A :: l^3 : L^3$. Ed ecco messa in vista una bella proprietà delle corde simili, che ad assisse proporzionali alle lunghezze corrisponde sempre la quantità costante $\frac{ddy}{y}$, qualunque sia la grandezza della ordinata y relativa alla detta assissa. E conciosiachè per la formola (>.) $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, ne segue, che i tempi delle vibrazioni analoghe delle corde CLK, CLA si riferiranno come $l^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, cioè come le radici quadrate dei cubi delle lunghezze CK, CA.

Ciò dimostrato, sia CLAL la prima delle parti infinitesime, ed ultima, nelle quali &c.

pertanto $\frac{\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{cs} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, e quindi $y = \frac{L}{cs^{\frac{2}{3}}}$. L'equazione $\frac{2\cdot\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{cs} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ mi dà la distanza dal secondo nodo $y = \frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot L}{cs^{\frac{2}{3}}}$. Ne nascerà dunque la serie delle cercate distanze dal punto C $\frac{L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{3^{\frac{2}{3}}\cdot L}{cs^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{cs^{\frac{2}{3}}\cdot L}{cs^{\frac{2}{3}}} = L$.

XXXII. Ci siano due corde triangolari simili CLrL, CLra della stessa materia, e crassizie, e tese dalla medesima somma di forza, le quali si vibrino intere, o divise in pari numero di parti. Si conformeranno esse a figure analoghe, le quali non dipendono nè dalla massa, nè dalla crassizie, nè dalla tensione, ma soltanto dalla lunghezza, e dalla massima saetta. Si supponga questa costante, ed accaderà, che ad assisse proporzionali alla lunghezza corrisponderanno ordinate uguali. Nella formola generale spettante alla corda inegualmente grossa $-\frac{aVD\,ddy}{My} = \phi y\cdot dy^2$ si sostituisca $\frac{GL}{2}$ in cambio di V, $\frac{Gy}{L}$ in cambio di ϕy, onde ne risulti $-\frac{aL^2D\,ddy}{2My} = y\,dy^2$ espressione propria delle corde triangolari. Presa in due corde CLrL CLra la assissa y, ed i loro elementi dy proporzionali alle lunghezze L, ne provengono y, dy, ddy uguali in ambo le corde. Quindi sarà costante il

il valore $-\frac{ddy}{y}$, e stando adq^2 come L^3, sarà parimente (supponendosi D costante) $\frac{aL^2}{M}$ come L^3, e per conseguenza a come ML: ma nelle corde simili CLnl, Cane M come L^2; dunque a come L^3: e perchè per la formola (7) $t = \frac{k\sqrt{ai}}{\sqrt{h}}$, ne segue che i tempi delle vibrazioni analoghe delle corde CLnl, Cane si riferiranno come $L^{\frac{3}{2}}$, cioè come le radici quadrate dei cubi delle lunghezze CK, CA.

Ciò dimostrato, sia CLnl la prima delle parti infinitesime, ed unisone, nelle quali si suppone divisa la corda Cane; e giacchè sta immobile la linea Lnl, io posso considerare CLnl come una corda. Essendo dunque, qualmente ho testè provato nel num.^{ro} precedente, $CK = \frac{L}{\omega^{\frac{2}{3}}}$, se ne raccoglie $\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{\omega}$, ed essendo il tempo di una vibrazione della corda $CLnl = \frac{ck}{3\omega b}\sqrt{\frac{2ML}{hD}}$, si averà l'analogia

$\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{\omega} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{ck}{3\omega b}\sqrt{\frac{2ML}{hD}} : \frac{ck}{3b}\sqrt{\frac{2ML}{hD}}$

= t tempo d'una vibrazione della corda intera Cane.

Che se CLnl, LnG siano due minime parti unisone, onde si abbia $CH = \frac{2^{\frac{2}{3}}.L}{\omega^{\frac{2}{3}}}$, e per conseguenza $\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{2.L^{\frac{3}{2}}}{\omega}$; pongo al paragone la corda

corda CGaG, che oscilla divisa in due porzioni unisone, colla corda CEaE, che parimente si vibra in due porzioni unisone distribuita, e mi si presenta l'analogia

$$\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{2L^{\frac{3}{2}}}{cs} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{ck}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}} : \frac{ck}{2\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$$

$= t$, tempo di una vibrazione della corda CEaE, che oscilla scompartita in due membri unisoni.

Mettendo al confronto l'aggregato delle tre minime parti unisone colla corda CEaE, che si agita divisa in tre porzioni, scoprirò il tempo impiegato in una oscillazione di questa ultima corda, cioè $t = \frac{ck}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$.

E generalmente, qualunque sia il numero n delle parti unisone, si troverà sempre $t = \frac{ck}{n\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$; laonde la stessa formola si adatta a qualsivoglia valore intero di n o finito, o infinito.

Mi ristringo a cavare l'unica conseguenza, che i tempi di una vibrazione della stessa corda, secondo che si vibra intera, o divisa in 2, 3, 4 &c. parti unisone, saranno proporzionali alla serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c.; e quindi i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in tempo uguale accetteranno la ragione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c., qualmente interviene altresì

nella

nella corda cilindrica.

XXXIII. Avverto, che senza punto alterare il valore del tempo t, le sezioni per esempio $L \alpha L$ della corda possono cangiarsi di rettangolari in circolari, purchè passi uguaglianza fra le sezioni dell'una, e dell'altra figura corrispondenti ad assisse uguali. In tale ipotesi nascerebbe la figura della corda dal girare (Fig. 6.) la parabola Apolloniana CKl intorno all'asse CA; imperciocchè stando sempre per la natura di essa curva CK come Kl^2, la sezione circolare il cui raggio Kl, o sia la grossezza della corda accetterebbe costantemente la proporzione della assissa $CK = y$. La condizione essenziale della nostra corda consiste in ciò, che le sezioni, o le grossezze variabili si corrispondano nella ragione della assissa, nulla importando poi, che le dette sezioni siano piuttosto rettangolari che circolari. Lo stesso accade anche nelle corde di grossezza costante, la figura delle quali non ha punto luogo nei tempi delle loro vibrazioni.

XXXIV. I nodi della corda $Ce\alpha e$ (Fig. 7.), che trema divisa nel numero di parti n, si determinano agevolmente. Cominciando dal punto C,

si

si prenda la serie delle parti infinitesima $\frac{L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{2^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{3^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, nelle quali si supponga distribuita la nostra corda, ed essa serie si continui sino al numero n di termini. Determineremo il primo nodo facendo $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}} : \frac{L}{cs^{\frac{2}{3}}} :: L : \frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$, onde ne risulti il quarto termine dell'analogia $\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$ uguale alla distanza del primo nodo dal punto C.

Colli analogia $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}} : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{cs^{\frac{2}{3}}} :: L : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ si renderà nota la distanza $= \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ del secondo nodo dal punto C.

Proseguendo con tal ordine ci si presenterà la progressione $\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{3^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}} = L$, la quale in ciò solo discorda da quella delle parti infinitesima, che il divisore $cs^{\frac{2}{3}}$ si cangia in $n^{\frac{2}{3}}$; e perciò quando n si accresca all'infinito, la seconda serie coincide colla prima.

Siccome la prima serie si è dedotta dal dividere per cs la quantità $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, posta $q = L$; così la seconda serie può nascere, dividendo per n la stessa grandezza $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, e facendo gradatamente 1, 2, 3, 4, &c. di queste parti uguali a $\frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$. I

valori

valori di q, che si scopriranno, saranno uguali ai termini della progressione seconda.

XXXV. Giacchè $q^{\frac{1}{2}}dq$ è proporzionale al tempicello costante, in cui si vibrano le cordicelle unisone dq, ne segue, che dividendo per n la quantità $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, io vengo a distribuire la corda in porzioni composte di un pari numero $\frac{\infty}{n}$ di elementi unisoni, le quali porzioni sono altresì unisone. Quindi le corde triangolari hanno la proprietà comune alle corde cilindriche, che i segmenti unisoni sono formati da un egual numero di elementi unisoni, e generalmente i tempi delle vibrazioni di due segmenti serbano la proporzione dei numeri degli elementi unisoni, che nei mentovati segmenti son contenuti.

Tagliata ad arbitrio $CK = q$, il numero degli elementi unisoni contenuti nella parte CLlL a quello degli elementi contenuti nella corda intera CElE sta come $q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, e per conseguenza il numero dei detti elementi compresi nella parte LlE si riferisca a quello contenuto nella corda totale come $L^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$. Nella stessa proporzione si corrisponderanno i tempi delle vibrazioni del segmento LlE, e della corda CElE, quando

quando l'uno, e l'altra oscillano interi. Sarà $Lr\ell$ l'ultima delle porzioni; il cui numero n, nelle quali si può scompartire una corda, quando si vibra; se l'assissa $CK = q$ si ponga eguale ad $\frac{\overline{n-1}^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}.L$. Avremo pertanto $q^{\frac{3}{2}} = \frac{n-1}{n}.L^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} - \frac{L^{\frac{3}{2}}}{n}$; e perciò i tempi delle vibrazioni della porzione $Lr\ell$, e della corda $C\ell r\ell$, che resta indivisa, i quali accettano generalmente la ragione di $L^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, li troveremo come $\frac{L^{\frac{3}{2}}}{n} : L^{\frac{3}{2}}$, o sia come $\frac{1}{n} : 1$, qualmente in fatti dee stare. Se la corda $C\ell r\ell$ oscillasse distribuita nel numero n di parti, ne risulterebbero i tempi uguali.

Il segmento $Lr\ell$ può anch'esso vibrarsi scompartito in 2, 3, 4 &c. membri unisoni; e quindi la totale serie di suoni, che può rendere, è proporzionale ai numeri 1, 2, 3, 4 &c.

Esempio V.
Trovare il tempo nel quale si vibra una corda di figura conica.

XXXVI. Passo a far parola delle corde di figura conica, le quali traggono l'origine dal girare il triangolo $CA\ell$ (fig. X.) intorno all'asse CA. Lungo $CA = L$, la base circolare, il cui raggio $A\ell = G^2$, $CK = q$, $KH = dq$, la massa della corda $= M$, il peso o forza, che

la

la tende = P. Per la natura del cono abbiamo il volume $V = \frac{G^2 L}{3}$, ed inoltre l'analogia $L^2 : q^2 :: G^2 : \frac{G^2 q^2}{L^2}$ che mi dà la sezione circolare, il cui raggio $KL, = \frac{G^2 q^2}{L^2}$. Per la qual cosa il volume del minimo frusto conico $LnG = \frac{G^2 q^2 dq}{L^2}$. La massa di un tal elemento si determina mediante l'analogia $\frac{G^2 L}{3} : M :: \frac{G^2 q^2 dq}{L^2} : \frac{3Mq^2 dq}{L^3}$, l'ultimo termine della quale si agguaglia alla massa, di cui si va in traccia.

Sia $KH = dq$ una delle minime parti, nelle quali la corda CaL si suppone divisa, e passando adequazione fra i raggi KL, HG, si può considerare costante la grossezza della funicella LnG, la cui lunghezza $KH = dq$. Per la legge delle corde ugualmente grosse si vibrerà essa funicella nel tempo espresso in secondi $t = \frac{ck}{nb}\sqrt{\frac{3Mq^2 dq^2}{L^3 hP}}$ (37.), significando giusta il consueto $\frac{c}{nb}$ il raggio diviso per la semicirconferenza circolare, k un minuto secondo, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Dovendo esser unisoni tutti gli elementi KH, ne' quali è scompartita la corda, la grandezza qdq ha da assumersi in qualità di costante. Presa pertanto la $\int q dq = \frac{q^2}{2} = \frac{L^2}{2}$, qualora $CK = q = L$, e chiamando cs il numero infinito delle parti

unisone

unisone componenti la corda; si do-
vrà avere $\frac{\frac{1}{2}L^2}{cs} = q\,dq$. Effettuata la
sostituzione nella formola (33.); ci si
presenterà $t = \frac{ck}{2bcs}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$ (36.) tem-
po di una vibrazione della corda cera,
che oscillando si adatta ad una curva
fornita del numero cs infinito di
ventri.

XXXVII. Il metodo, contenuto nel
numero XXXII. ci insegna a trovar
la distanza dal punto C dei nodi, o
cerchi stabili, il diametro di uno dei
quali sia per esempio LnL, quando
la corda oscilla divisa in un numero
infinito di parti unisone.

Conciossiachè $\int q\,dq = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}L^2$,
posta $q = L$, dividasi per cs la gran-
dezza $\frac{1}{2}L^2$, e formata l'equazione
$\frac{\frac{1}{2}L^2}{cs} = \frac{1}{2}q^2$, servirà questa per tro-
vare la lontananza del primo nodo
dal punto C $= q = \frac{L}{\sqrt{cs}}$

La formola $\frac{2\cdot\frac{1}{2}L^2}{cs} = \frac{1}{2}q^2$ som-
ministra la distanza del secondo no-
do $q = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{cs}}$.

Continuando in tal guisa, ci
si presenterà la progressione delle
distanze dei nodi dal punto C
$\frac{L}{\sqrt{cs}}, \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{cs}}, \frac{L\sqrt{3}}{\sqrt{cs}}$ &c. $\frac{L\sqrt{cs}}{\sqrt{cs}} = L$.

XXXVIII. Ora egli è di uopo l'an-
dare in traccia del tempo di una oscil-
lazione della corda intera, o pure
divisa

divisa in un numero qualunque di parti unisone: i Il tempi delle oscillazioni di due corde coniche simili, della stessa materia formate, e tese dalla stessa forza P, che si vibrano intere, o scompartite in pari numero di membri, debbono stare fra loro come una potestà delle lunghezze delle corde predette. Dal numero V. raccogliesi, che le curve, in cui si ripiegano le corde, sono espresse dalla equazione $\varphi q . dq^2 = - \frac{aVP\,ddy}{My}$, e giacchè nel nostro caso $\varphi q = \frac{G^2 q^2}{L^2}$, avremo $\frac{G^2 q^2 dq^2}{L^2} = - \frac{aVP\,ddy}{My}$, ~~fa nelle due corde simili le assisse q ed i loro elementi dq proporzionali alla lunghezza L, debbono ad esse corrispondere ordinate eguali, qualunque sia in entrambe le corde costante la massima ordinata. La ragione si deduce da ciò, che la figura, in cui si adatta una corda sonora oscillando, non può variarsi, trattandosi di corde simili, sicchè e nella lunghezza, e nelle ordinate proporzionali in siti analoghi alla massima ordinata; sopra di che veggasi il numero XXXII. Avremo dunque nella curvatura ipotesi y, dy, ddy eguali in amendue le corde, e per conseguenza costante il valore $\frac{ddy}{y}$.~~ E perchè sendo G^2

+ e perciò $- \frac{ddy}{y} = \frac{MG^2 q^2 dq^2}{aL^2VP}$. Ora se in due corde simili le assisse q, ed i loro elementi dq proporzionali alla lunghezza L, impariamo dal numero XXXII. essere costante il valore $- \frac{ddy}{y}$.

G^2 come L^2, $q^2 dq^2$ come L^4, V, ed M come L^3, e P costante, ne risulta a come L^4: e perchè pel num.^{ro} VIII. $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si conchiude essere t proporzionale ad L^2. Per la qual cosa i tempi delle oscillazioni di due corde coniche simili CLzL, Ceze della stessa materia, e tese dal medesimo peso P si riferiscono in ragione dei quadrati delle lunghezze, cioè a dire come $\overline{CK}^2 : \overline{CA}^2$.

Sia CLzL la prima delle parti minime, ed unisone, in cui suppongasi divisa la corda Ceze. Stando immobile la sezione LzL, mi è concesso di considerare CLzL come una corda appoggiata ad uno scannello nel punto L; e giacchè qualmente ho testè provato, $CK = \frac{L}{\sqrt{cs}}$, o sia $\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{cs}$, ed il tempo di una vibrazione della corda CLzL $= \frac{ck}{zb\,cs}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$, si verifica l'analogia $\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{cs} : \overline{CA}^2 = L^2 :: \frac{ck}{zb\,cs}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} : \frac{ck}{zb}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} = t$, il quarto termine della quale si eguaglia al tempo di una vibrazione della corda Ceze.

Se poi CLzL, LzG siano due infinitesime porzioni unisone, di modo che si abbia $CH = \frac{L\sqrt{z}}{\sqrt{cs}}$, e conseguentemente $\overline{CH}^2 = \frac{zL^2}{cs}$, riatto al

al confronto la corda CGnG, che viene partita in due porzioni unisone, colla corda Cene, che oscilla altresì in due membri unisoni scompartita, e ne deduco l'analogia $\overline{CH}^2 = \frac{nL^2}{cs} : \overline{CA}^2 = L^2 :: \frac{ck}{nb.\infty}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} : \frac{ck}{2.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} = t$, il cui quarto termine pareggia il tempo di una vibrazione della corda Cene, che si vibra divisa in due parti unisone.

Paragonando l'aggregato delle tre prime infinitesime parti unisone colla corda Cene, che si agita in tre porzioni distribuita, troverò il tempo speso in una vibrazione della corda ultimamente nominata, cioè $t = \frac{ck}{3.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}}$. Si inferisca la conseguenza, che qualunque sia il numero n delle parti unisone, si scoprirà sempre $t = \frac{ck}{n.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}}$, formola, che si accomoda a qualsisia grandezza di n finita, o infinita.

Quindi i tempi di una vibrazione della medesima corda conica, secondochè oscilla intera, o scompartita in 2, 3, 4 &c. porzioni unisone accetteranno la ragione de' termini della progressione armonica 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c., e perciò dalla serie aritmetica 1, 2, 3, 4 &c. verranno dinotati i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in tempo pari.

XXXIX.

XXXIX. Ci si renderà facilmente manifesta la posizione dei nodi della corda CAAC, che oscilla partita nel numero n di membri. Dato principio dal punto C, piglio la serie di 1, 2, 3, 4 &c. parti minime, che continuo sino al numero n di termini, ed è la seguente

$$\frac{L}{\sqrt{\infty}},\ \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{\infty}},\ \frac{\sqrt{3}\cdot L}{\sqrt{\infty}},\ \frac{\sqrt{4}\cdot L}{\sqrt{\infty}}\ \&c.\ \frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}}.$$

Stabilisco il sito del primo nodo facendo $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}} : \frac{L}{\sqrt{\infty}} :: L : \frac{L}{\sqrt{n}}$, e l'ultimo termine dell'analogia pareggia la lontananza $= \frac{L}{\sqrt{n}}$ del primo nodo dal punto C.

Col mezzo della proporzione $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}} : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{\infty}} :: L : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ scopro la distanza $\frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ dal punto C del secondo nodo.

Seguitando a battere questa strada, mi si affaccia la serie delle distanze dei nodi 1mo, 2do, 3^{zo}, 4to &c. dal punto C

$$\frac{L}{\sqrt{n}},\ \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}},\ \frac{\sqrt{3}\cdot L}{\sqrt{n}},\ \frac{\sqrt{4}\cdot L}{\sqrt{n}}\ \&c.\ \frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{n}} = L,$$

la quale si cangia in quella spettante alle parti unisone infinitesime componenti la corda, quando n tanto si aumenti, che divenga $= \infty$

In quella guisa che la serie confacente alle parti minime ha tratto l'origine dal partire per ∞ la grandezza $\frac{1}{2}L^2 = \int q\,dq$, posta $q = L$, non

altrimenti

altrimenti l'ultima serie può nascere dividendo per n la medesima quantità $\frac{1}{2}L^2$, e mettendo ordinatamente $= \frac{1}{2}q^2$ il quoziente, che ne risulta, moltiplicato per 1, 2, 3, 4 &c. I valori di q, che si deducono da tali equazioni, s'agguagliano ai termini dell'ultima progressione.

XXXX. Conciossiachè per la formola (37.) $\frac{ck}{rb} q\,dq \sqrt{\frac{3M}{L^3hD}} = t$ la quantità $q\,dq$ stia in ragione del tempicello costante, in cui si vibrano le funicelle unisone, la lunghezza delle quali $= dq$, addiviene, che partendo per n la grandezza $\frac{1}{2}L^2 = \int q\,dq$ posta $q = L$, distribuisco la corda in porzioni unisone composte di un egual numero $\frac{cr}{n}$ di elementi unisoni. Per la qual cosa la proprietà, che i segmenti unisoni siano formati da un pari numero di elementi unisoni, è comune alle corde coniche, cilindriche, triangolari, a cui si debbono aggiungere quella dell'Esempio I., la cui grossezza $\varphi x = \frac{G^2H^4}{\overline{H+x}^4}$. In ciascuna di queste corde i tempi delle vibrazioni di due segmenti presi ad arbitrio accettano la ragione dei numeri degli elementi unisoni, che in essi segmenti sono compresi.

Segnata a piacimento $CK = q$, il numero degli elementi unisoni contenuti nella parte CKL si riferisca a quello degli elementi unisoni con-

tenuti

tenuti nella corda intera Cezl in proporzione di q^2 a L^2; e conseguentemente il numero dei mentovati elementi compresi nel residuo Lzl corrisponde a quello contenuto nella corda totale come $L^2 - q^2 : L^2$. Nella medesima proporzione si riguardano i tempi delle oscillazioni della porzione Lzl, e della corda Cezl, qualora l'una e l'altra si vibrino intere, o pure divise in pari numero di parti.

Sarà Lzl l'ultima delle porzioni unisone, il cui numero n, nelle quali si intende scompartita la corda Cezl, se l'assissa $CK = q$ si ponga eguale a $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot L$, onde ne risulti $q^2 = \frac{n-1}{n} \cdot L^2 = L^2 - \frac{L^2}{n}$. I tempi delle oscillazioni della parte Lzl, e della corda Cezl, che si vibra indivisa, i quali stanno generalmente in ragione di $L^2 - q^2 : L^2$, li scopriremo nel nostro caso come $\frac{1}{n} : 1$, proporzione, che effettivamente loro compete.

Delle Vibrazioni delle Corde di ineguale grossezza, la quale non viene regolata da una legge costante.

XXXXI. Una corda, la cui varia grossezza non soggiace a legge costante, non può mai accomodarsi ad una figura equilibrata. Sia per esempio la corda formata da due porzioni, la cui grossezza ricevano due leggi diverse, potrà bene ciascuna

parte

parte ripiegarsi in una curva equili=
brata; ma in qual punto, nel quale
si fa transito da una legge all'altra,
accaderà sbilanciamento, e succeden=
do innumerabili, e continue laterali
comunicazioni di moto da particola
a particola della corda, non giungerà
essa mai a ricavare una figura bilan=
ciata compiutamente, ogni elemento
della quale si vibri insieme nel
medesimo tempo. Ne seguirebbe
maggiore contrasto, se da molte
leggi dipendesse la grossezza della cor=
da. Si inferisca, che le varie particole
della nostra corda si vibrano in
tempi diversi, e che sendo sempre
di indole ~~diversa~~ differente la curva, a cui si
conforma, non sono nemmeno costanti
i tempi delle vibrazioni della stessa
particola. Quindi ne risulta un
suono incerto, e falso, che intonar
non si può, e che riesce sommamente
fastidioso all'orecchio.

XXXXII. Il ridurre a computo
la velocità delle particole di tali corde,
io lo giudico un problema intrattabi=
le. Sia f la forza applicata ad una
particola; s'io farò $\frac{2Efdt}{k}$ uguale
all'incremento di quantità di moto
operato direttamente in essa partico=
la, ed altresì agli incrementi, che
a cagione della comunicazione
del moto succedono nelle altre
particole; sono condotto sicura=

mente

mente al paralogismo da questa for=
mola, la quale non si avvera salvo=
chè nell'ipotesi, che tutte le parti=
cole si muovano con pari celerità.
La formola $2E\int dS$ uguale alle au=
mentazioni di forza viva cagionate
in tutte le particole è giusta, ma per
usarla farebbe di uopo sapere le
leggi delle velocità di esse particole,
e qual porzione dell'azione $2E\int dS$
si impieghi ad accrescere la forza
viva di ciascuna particola. Quello
che si è detto di un'azione si applichi
alle altre tutte, e si conchiuda, che
la forza viva di una particola non di=
pende solo dall'azione della forza,
che direttamente la spinge, ma ancora
~~dalle azioni~~ mediante la comuni=
cazione del moto dalle azioni delle
~~[illegible]~~ forze, che sollecitano
le rimanenti particole. Se nel prin=
cipio del moto la corda è ripiegata
in una figura bilanciata, l'equazione
di tale figura mi rende note le forze,
che spingono i punti della corda.
E poichè nei susseguenti istanti le
curve sono sempre analoghe alla
primitiva, conosco i valori delle
forze in ciascuna curva, ed è in mia
potestà il calcolare la velocità di qual=
sivoglia particola, ed il tempo di una
sua vibrazione. Ma se la corda è
incapace di accomodarsi a curve equi=
librate, sappiasi l'equazione della
curva, a cui si adatta nel cominciamento
del

dal moto, e per conseguenza siano conosciute le forze, che sollecitano le particole della corda; quale frutto ne raccoglierò io da tal cognizione? Sendo nei susseguenti istanti le curve di indole differentissima e ignota, rimango all'oscuro dei valori delle forze, nè mi è concesso di computare le velocità, e i tempi delle vibrazioni. Non ho voluto risparmiare parole, onde mettere in vista le insuperabili difficoltà, che si incontrano maneggiando il problema delle vibrazioni delle corde, la cui ineguale grossezza non viene regolata da legge costante.

XXXXIII. Si contenti dunque chi legge, che io procuri di rischiarare questo argomento con un esempio, che fra tutti è il più semplice. La metà $A'C$ (fig. 8) della corda $A'A$ sia più sottile, ovvero meno densa dell'altra metà CA. Nel primo istante del movimento sia essa ripiegata nella curva $A7A'$, la cui equazione $x = \frac{L \cdot \text{Arco Rag. } c \text{ Seno } y}{2b}$, posto $AA' = L$, $C7 = c$, $A1 = x$, $1K = y$, ed essendo b il quadrante circolare del raggio c. Le due metà della curva sono bilanciate, e la stessa proprietà competerebbe alla curva intera $A7A'$, se le sue due metà fossero ugualmente grosse. Veggasi la mia Opera Delle corde, ovvero fibre elastiche, schediasma IV. Le forze sollecitanti

i punti K, H si riferiscono nella proporzione delle ordinate DK, LH, e le forze acceleratrici accettano la ragione composta diretta delle predette ordinate, ed inversa della grossezza delle semicorde A7, A7. Segno varj elementi della corda di pari lunghezza 7G, GH &c., 7e, eD &c. essendo l'ordinata e7 comune ai due elementi 7e, 7G, le forze acceleratrici stanno in ragione reciproca della grossezza di essi elementi. Se dunque non fossero connessi nel punto 7, l'elemento 7e si muoverebbe più celeremente del 7G. il punto 7, ed amendue, comune La loro unione fra sì, che debba acquistare una media velocità, il che si ottiene mediante la comunicazione del moto dell'elemento e7, all 7G. Ritardato in tal guisa l'elemento e7, ritarda esso l'elemento De, e viene da questo accelerato, e l'accelerazione si comunica agli elementi ed il ritardamento 7G, GH &c. agli elementi DK &c. Si prosegu[isc]a il discorso con questo metodo, e si comprenderà, che rispettivamente a quella velocità, che avrebbero acquistato i punti della semicorda A7, se ancora la 7A fosse della stessa grossezza, i nominati punti sono tanto più ritardati, quanto maggiormente si discostano dal punto A', e si accostano al punto 7. In

riguardo

riguardo poi alla velocità, che comparirebbero ai punti della semicorda 7A, se altresì la 7A avesse con essa comune la grossezza, i predetti punti si vanno sempre più accelerando secondochè si allontanano dal punto A, e si avvicinano al punto 7. Da ciò si raccoglie, che quando il punto 7 sarà pervenuto in C, la semicorda A7 avrà ~~su~~passato l'asse ACA, e la semicorda A7 ad esso non sarà giunta per anche, dimodochè la corda avrà presa la Fig. 10. AMCNA

La nostra corda sia tutta discesa sotto l'asse ACA, conformandosi alla curva AfA (Fig. 11.), e seguiti ancora a muoversi per la direzione Cf. L'elemento af verrebbe più ritardato dall'elemento fg, se non fossero congiunti nel punto f. In tale circostanza pertanto succede tutto il contrario di quello, che abbiamo notato avveniva negli elementi a7, 7G (Fig. 9.) e l'elemento fg (Fig. 10.) ~~accelera~~ fa che meno si ritardi l'elemento af. Con un raziocinio analogo a quello, che ho adattato alla figura ~~ottava~~ nona, si conchiuderà, che mediante la comunicazione del moto le particole af, de &c. vengono tanto ~~più accelerate~~ meno ritardate, quanto cresca la loro distanza dal punto A; e le particole fg, gh &c. ricevono maggiore ritarda-

mento

mente, quanto più si allontanavano dal punto A. Quindi si inferisca, che gli elementi della corda si vibreranno in tempi diversi, e che procedendo da A' verso A giungeranno allo stato di quiete gradatamente sempre più tardi, rendendo suoni, che dentro certi limiti passeranno dall'acuto al grave.

Si aggiunga, che sendo le curve A'MCNA' (fig. 19.), A'fA (fig. 18.) &c. di indole sempre diversa a cagione della continua comunicazione laterale di moto, nè ritornando mai la corda a ripigliare la primitiva figura A'ZA (fig. 9.), additano che la stessa particola non si vibri in tempo costante, ma fra determinati confini faccia transito dall'acuto al grave, e dal grave all'acuto. Il perchè e le particole diverse, e la stessa particola producono un suono incerto, che intonar non si può, e merita il nome di falso. La causa di questi effetti dipende dal diverso valore della forza acceleratrice degli elementi aZ, ZG, il quale fa sì, che non cessi mai la comunicazione di moto, e che per conseguenza la corda non possa ottenere di accomodarsi ad una figura del genere delle bilanciate, alle quali soltanto compete l'isocronismo.

Nell'oscurità della materia, che ho per le mani, basti questo saggio, il quale per altro sembrami,

che

che rischiarsi quanto basta la natura
dal Suono falso -

Mutazioni da farsi nella Dissertazione del Suono Falso.

Il num.° X. si principij così.

X. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A $y = 0$, abbiamo $-dv = \frac{dy}{y} = z\,dx$: ma nella logistica la ragione fra le due ordinate dy, e 0 maggiore di qualunque data [fra le ordinate $= dy$, e l'ordinata $= 0$] atteso che sia l'intercetta $-dv = \infty$; dunque sarà parimente tale $z\,dx$, e molto più $z = \infty$. La formola $H+x = \frac{q}{z}$ m'insegna &c.

La fig.a 1.a si cangi nel modo seguente.

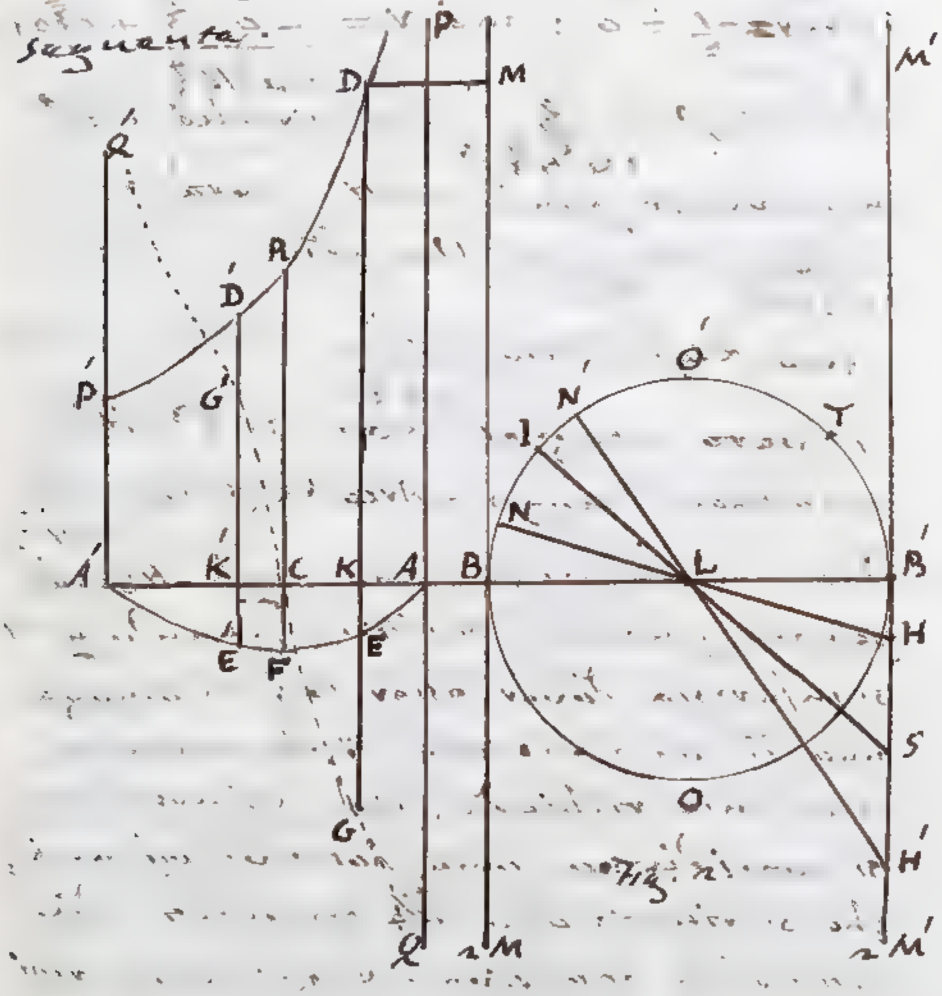


Fig. 1a

Il num.° XXI si presenta nella sottoscritta maniera

o sia nell'equivalente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{-dp}{G^2H^{\frac{4}{3}}p^2 + g}$, che può prendere altresì l'aspetto seguente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} \cdot -dp}{\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} + p^2}$

Dunque $\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} = C^2$ (30.), ed integrando mi si presenta $B + 3q^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. $-p$ XXII. Determineremo il valore della costante B riflettendo, che dovendo essere pel num.° XXII $z = -\infty$ nel punto A (fig. 12), avremo in detto sito $v = \frac{-1}{2} = 0$: ma $v = \frac{-g q^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ (29.); dunque $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, e giacché nel mentovato punto $q = H$, sarà $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{5}{3}}} = \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Quindi $B =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} - 3H^{\frac{1}{3}}$, e perciò il vero integrale sarà $3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} =$ Arco Rag. C Tang. $-p$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Dalla la riflessione, che $3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}$ è sempre quantità positiva, quando $q > H$, si inferisca dover essere tale l'omogeneo di comparazione, il che necessariamente richiede, che nel nostro caso si considerino come positivi gli archi, che si riferiscono alla tangente da principio negativa. E poiché gli archi relativi

relativi alle tangenti di principio negativa, che si prendono in qualità di positivi, si agguagliano agli archi positivi, che corrispondono ad eguali tangenti, che nella loro origine son positive; io in seguito mi servirò della formola $z \cdot q^{\frac{1}{3}} \cdot H^{\frac{1}{3}} =$
Arco Rag. C Tang. p = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{2}{3}}}$ (31.);
perchè nelle conseguenze si accorda con quella, che dall'analisi mi viene somministrata stabilire la grandezza &c.

Il passo XXXII. si cangi così.

XXXII. Mentre due corde simili triangolari simili CLeL, Cezl, si vibrano intere, o divise in pari numero di parti, e dalla stessa materia, e crassizie, e tese dalla medesima somma di forze, deggiono adattarsi a curve della stessa natura,* e possono certamente a curve simili accomodarsi. Nella formola generale spettante alla corda inegualmente grossa $-\frac{aVp\,ddy}{My} = \phi q \cdot dq^2$ si sostituisca $\frac{CL}{2}$ in cambio di V, $\frac{Cq}{L}$ in cambio di ϕq, onde ne risulti $-\frac{aL^3 p\, ddy}{My} = q\,dq^2$, o sia $-\frac{ddy}{y} = \frac{nMq\,dq^2}{aL^2 p}$. La curva, in cui si ripiega la corda CLeL, sia espressa dalla formola $-\frac{ddy}{y} = \frac{nMq\,dq^2}{aL^2p}$. Mi insegna questa, che la quantità $-\frac{ddy}{y}$ sarà costante, qualunque siano tali y, e dq, qualunque valore abbia y nell'atto che la corda

* le quali non dipendono nè dalla massa quà dalla crassizie, nè dalla tensione, ma soltanto dalla lunghezza, e dalla massima esatta, e possono &c.

51

si vibra. Un'altra corda triangola=
re simile CQaL, ugualmente den=
sa e grossa, e tesa dallo stesso peso
verificherà l'equazione $\frac{ddY}{Y}$ =
$\frac{2 M Q dQ^2}{A L^2 P}$, in cui parimente si ve=
rificherà, che supposti costanti
Q, e dQ, sia altresì costante $\frac{ddY}{Y}$,
assegnata ad Y dentro i limiti
della quantità minima qualsivo=
glia grandezza. Si stabilisca
$q : Q :: dy : dQ :: l : L$; e
perchè $m : M :: l^2 : L^2$, avremo
$\frac{ddy}{y} : \frac{ddY}{Y} :: \frac{l^3}{a} : \frac{L^3}{A}$. Se le
corde si adattino a due curve simi=
li, sarà $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, e per
conseguenza $\frac{l^3}{a} = \frac{L^3}{A}$, e passando
all'analogia $a : A :: l^3 : L^3$
cioè i diversi valori delle costanti
a, A come i cubi delle lunghezze
ck, CA. Ora la grandezza di
$\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$ non si muta al cangiarsi
delle ordinate y, Y mentre si vibrano
le corde; dunque sarà sempre
$\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, ed $a : A :: l^3 : L^3$.
Ecco messa in vista una bella
proprietà delle corde simili, che
ad assissa ~~analoga~~ proporzionati alla lunghezza corrisponda
sempre la quantità costante $\frac{ddy}{y}$,
qualunque

qualunque sia la grandezza delle ordinate y relative alle date assisse. E conciossiaché per la formola (7) $t = \frac{k\sqrt{ar}}{\sqrt{h}}$, ne segue che i tempi delle vibrazioni analoghe delle corde CLnl, CAna si rifaranno come $l^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, cioè come le radici quadrate dei cubi delle lunghezze CK, CA.

Ciò dimostrato, sia CLnl la prima delle parti infinitesime, ed unisone, nelle quali &c.

Nel num.^{ro} XXXVIII. si faccia la seguente mutazione dopo le parole delle corde predette.

Dal numero V. raccogliasi, che le curve, in cui si ripiegano le corde, sono espresse dalla equazione $\varphi q \cdot dq^2 = -\frac{a\sqrt{P}\,ddy}{My}$; e giacché nel nostro caso $\varphi q = \frac{G^2 q^2}{L^2}$, avremo $\frac{G^2 q^2 dq^2}{L^2} = -\frac{a\sqrt{P}\,ddy}{My}$, e perciò $-\frac{ddy}{y} = \frac{MG^2 q^2 dq^2}{aL^2\sqrt{P}}$. Quasi in due corde simili le assisse q, ed i loro elementi dq proporzionali alle lunghezze L, impariamo dal numero XXXII. essere costante il valore $-\frac{ddy}{y}$. Il perché sendo G^2 come L^2, $q^2 dq^2$ come L^4 &c.

[illegible]

Annotazione
alle lettere del Co: Jacopo Ricca
sopra la Trisezione
degli Angoli

stampata nel Tomo XIX. del Giornale di
Modena pag. 50
1780

Annotazione
del Signor Co. Giordano Riccati alla
lettera del Signor Co. Jacopo Riccati
suo Padre sopra la Trisezione degli
Angoli.

Questa Lettera fu da scritta l'anno 1751. dal Co. Jacopo Riccati mio Padre, ed avendola indirizzata alla celebratissima Signora Co. D. Maria Gaetana Agnesi, prende occasione di lodare meritamente la Instituzioni Analitiche, che nel 1748. aveva messe in pubblico, e che tanta gloria le hanno procacciato.

Le due maniere di triangoli, che il nostro Autore insegna a delineare nella lettera prima citata, riducono piano il problema della trisezione dell'angolo A B C (fig. 1.). Nei triangoli del primo modo il predetto angolo percorrerà tutti i valori cominciando dall'angolo nullo, e terminando nel retto, secondochè i lati B C, A B passano gradatamente dalla proporzione 1 : 1 a quella 1 : 0. L'angolo A B C accetta tutta la grandezza dello angolo nullo sino a due retti nei triangoli della seconda spezie, conformechè la proporzione fra i lati B C, A A fa transito per gradi minimi da quella di egualità 1 : 1, all'altra 2 : 1.

Sembra dunque ridotto piano il problema della trisezione degli angoli; sicchè quando dato l'angolo A B C, o il suo coseno, ed il seno tutto B C nei triangoli della prima maniera, oppure B A in quelli della seconda, si ricava il lato B A in un caso, B C nell'altro, ci si presenta un'equazione del terzo grado, e quel ch'è peggio ingombrata dalle quantità immaginarie. Scelta la proporzione fra i lati B C, B A, sono già determinati la base A C, e l'angolo A B C, il quale si può trisecare mediante la risoluzione di una formola

del

163 del secondo grado. Egli è frattanto un accidente, che un tal angolo si eguagli a quello, che mi viene proposto; nè senza la risoluzione, o costruzione di una formola del terzo grado, mi è permesso di delineare il triangolo ABC, in cui l'angolo B generalmente si dimostra eguale al dato.

Per rendere in qualche modo compiuta la soluzione di esso Problema, darò primieramente la costruzione delle due specie di triangoli ABC, e poscia additerò un artifizio meccanico per determinare il detto triangolo, qualora si voglia, che l'angolo B si agguagli ad un dato.

Dovendo essere ne' triangoli della prima maniera $b^2 - a^2 = bc$, ossia $b^2 - bc = a^2$; si assumano b in qualità di costante, a, c in qualità di variabili, ed indi si segnino a squadra (fig. a.) le linee $CL = CK = b$, e descritto il quadrante circolare LBK, e tagliata ad arbitrio $CA = c < CL = b$, resterà $AL = b - c$. Si faccia $AP = CL = b$, e col diametro LP descritto il semicircolo LOP, e condotta l'ordinata AO; per la natura del cerchio avremo $LA \cdot AP = b^2 - bc = \overline{AO}^2$; ma $b^2 - bc = a^2$; dunque $\overline{AO}^2 = a^2$, e perciò $AO = a$. Dato centro in A, col raggio $AO = a$ si segni l'arco OB, che tagli il quadrante LBK nel punto B, e tirate le linee AB, CB, il triangolo ABC sarà uno fra gl'infiniti appartenenti alla prima specie.

Quanto la linea $AB = a$ diviene più piccola, altrettanto si accosta al retto l'angolo ABC, e finalmente ad un retto si agguaglia, quando $AB = a = 0$, ed i punti A, B coincidono col punto L, ed il punto C col punto P. Qualora poi annullandosi la $CA = c$, le rette AB, CA coincidono, diventa nullo l'angolo ABC. Per la qual cosa i triangoli della

della prima specie servono a trisecare gli angoli, che stanno fra i limiti del retto, e del nullo.

Passo alla costruzione dei triangoli della seconda maniera, nei quali esser dee $b^2 - a^2 = ac$, oppure $a^2 + ac = b^2$, ed ove si considera costante, c, b variabili. Nella indefinita LP (fig. 3.) tagliata LA = a, col raggio AL descrivo prima il circolo LKNML, e poscia segnate AC = c, CP = a, col diametro LP delineo il semicircolo LOP, e pel punto C conduco l'ordinata CO. Col raggio CO disegno la porzione di cerchio OB, che intersechi la circonferenza LKN nel punto B; e finalmente tiro le linee AB, CB, che formeranno uno fra gli infiniti triangoli della seconda specie. Per la nota proprietà del circolo abbiamo $LC \times CP = \overline{a+c} \cdot a = \overline{CO}^2$; ma $\overline{a+c} \cdot a = a^2 + ac = b^2$; dunque $\overline{CO}^2 = b^2$, e conseguentemente CO = CB = b, ch'è il valore corrispondente ad AC = c; il che ec.

Se AC = c = 0, i due lati AB, CB coincidono, e questo è il caso dell'angolo ABC = 0.

Sia AC = c = AN = a, onde ne risulti $CO = b = a\sqrt{2}$. Perchè tirato nel circolo LKNML il raggio AK normale ad LN, la diagonale $LK = a\sqrt{2}$; il cerchio descritto col centro in C (che coincide col punto N) e col raggio CO passa pel punto K. Resta dunque determinato il triangolo AKN, il quale servirà per trisecare l'angolo semiretto AKN.

Posta AC = c = 2a; l'ordinata CO = b si eguaglia ad $a\sqrt{3}$. Segnato col raggio CO il circolo OB, e condotte le rette AB, CB; il triangolo ABC ha l'angolo B retto; perchè $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + 3a^2 = \overline{AC}^2 = 4a^2$, e quindi col mezzo di essersi diviso l'angolo retto in tre parti eguali.

Finalmente fatta AC = c = 3a, dimostrerò vari

determinata

determinata, e CO = b = 2a; il circolo descritto col raggio CA taccia il circolo QKNML nel punto N, ed il punto Q cadendo in N, l'angolo A diviene uguale a due retti.

I tre angoli menzionati: semiretto, retto, ed uguale a due retti, e dei quali la costruzione espressa nella fig. 3a ci va rendendo la misura, sono appunto quelli che si dividono in tre parti uguali mediante il circolo, e la linea retta. Venga per esempio proposto di trisecare l'angolo retto ABC. Sopra il lato AB si descriva il triangolo equilatero ABN, ed il cui lato, tirando il lato AN, finchè intersechi nel punto C il lato BC; e perciocchè l'angolo ABN pareggia due terzi di retto, ne segue essere l'angolo NBC uguale alla terza parte del retto ABC. Inoltre tirata BD normale ad AC, resterà l'angolo ABC diviso in tre parti uguali ABD, DBN, NBC.

La similitudine dei triangoli DAB, BAC somministra la analogia AD : AB :: AB : AC ed essendo $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$, troveremo $\overline{BC}^2 = 3a^2$, e perciò $BC = a\sqrt{3}$. Vedesi dunque che anche questa costruzione determina il triangolo ABC della seconda specie atto a dar la trisezione dell'angolo retto.

Nella specie dei nostri triangoli potendosi dividere in tre parti uguali tutti gli angoli, la cui misura sta di mezzo fra il nulla, ed i due retti, resta ch'io insegni l'artifizio per determinare il triangolo ABC (fig. ...), il cui angolo A si agguagli ad un dato.

Determineremo il triangolo della prima maniera ABC (fig. 2.), il cui angolo CAB sia dato, rivolgendo esso angolo intorno al centro C, sin=

tanto che

tantochè il lato AB si aguagli all'ordinata AO del semicircolo LOP descritto col diametro $LP = LC + LA$.

O pure in altro modo continuando il giro suddetto, finchè fatto l'angolo $BAH = BCA$, ne risulti $BH = LA = b - c$. I due triangoli ABC, HAB sono simili; perchè anno l'angolo A comune, ed all'angolo BCA si è descritto eguale il BAH. Avremo dunque, quando $BH = LA = b - c$,

$$CA : AB :: AB : BH$$
$$b : a :: a : b - c,$$

e perciò $b^2 - bc = a^2$, o sia $b^2 - a^2 = bc$, qualmente richiedono i triangoli della prima specie.

Si rintraccierà il triangolo ABC (fig. 3.) della seconda specie, che abbia l'angolo conosciuto ABR, girando esso angolo intorno al punto A, finchè il lato AC pareggi l'ordinata CO del semicircolo LOP segnato col diametro $LP = LC + LA$.

Otterremo similmente in altra guisa l'intento, continuando il predetto giro, sintantochè fatto l'angolo $ACH = BAC$, e continuata BA sino in H, si trovi $BH = LC = a + c$. La similitudine dei triangoli ABC, CAH mi somministra l'analogia

$$AB : BC :: BC : BH$$
$$a : b :: b : a + c,$$

da cui si deduce l'equazione $b^2 = a^2 + ac$ confacente alla proprietà dei triangoli ABC della specie seconda.

Segnata poscia (fig. 1.) $AD = x = \frac{a}{2b}\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{3}} - \frac{a^2}{2b}$ nei triangoli della prima maniera, $CQ = z = \frac{b^2}{2a} - \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3}}$ nei triangoli della seconda maniera, sarà ABD in una circostanza, CAQ nell'altra la terza parte dell'angolo proposto ABC.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

sulle [illegible], pi[illegible] [illegible] AAH [illegible]

uscita AH = [illegible] [illegible] minimo [illegible]

sono simili; [illegible] [illegible] angolo A [illegible]

angolo ACA [illegible] uguale all' [illegible]

Dunque, quando [illegible] [illegible] b, c, [illegible]

CA : AH [illegible] : [illegible]

b : a [illegible] [illegible]

e perciò $b^2 c$ [illegible] [illegible] $a^2 = b$ [illegible]

richiedeva i [illegible] [illegible] prima specie [illegible]

Si ottiene [illegible] triangolo AAH [illegible]

seconda specie [illegible] l'angolo [illegible]

girando [illegible] intorno al punto [illegible]

lato AC [illegible] [illegible] CO [illegible]

COD seguente [illegible] CD = C

Osservo [illegible] in altro [illegible]

to, continuando [illegible] giro, [illegible]

l'angolo ACH [illegible] continuazione AA [illegible]

H, si trovi AH [illegible] [illegible]

triangoli AAC [illegible] [illegible]

AA : AC [illegible] : AH

a : b [illegible] : a, c, [illegible]

da cui si deduce [illegible] [illegible]

alla proporzione [illegible] AAC della [illegible]

condizioni [illegible]

Seguendo [illegible] [illegible] AD = x [illegible]

[illegible] della [illegible] maniera, [illegible]

= [illegible] della [illegible]

niera, sarà AA [illegible] [illegible], CA [illegible]

ebbe la [illegible] [illegible] [illegible] A [illegible]

Esame
del Sistema Musico
del Sig.
Giuseppe Tartini.
nel Tomo XXII pag. 169. del nuovo
Giornale de' Letterati d'Italia
Modena

Esame del Sistema Musico
del Sig. Giuseppe Tartini.
Dissertazione Acustico-Matematica del Sig. Conte
Giordano Riccati.

È molto celebre il nome del Sig. Giuseppe Tartini, e per aver condotto l'arte di suonare il Violino al sommo grado di perfezione, e per la profonda cognizione di Contrappunto, mercè la quale componeva Sonate, e Concerti ricercatissimi, forniti di graziosa melodia, di gustosa armonia, di varia unità, ed eccellentemente condotti. L'impiego di primo Violino nella Cappella di S. Antonio di Padova, mentre veniva diretta prima dal P. M. Calegari, ed indi dal P. M. Vallotti, gli avea dato occasione di apprendere il maneggio della dissonanza, che il Calegari avea dedotto dalla attenta considerazione degli Autori del secolo decimosesto, e forse ancora dai famosi Duetti di Monsignore Agostino Steffani. Invaghito il P. Calegari di aver ridotto a metodo il mentovato maneggio, abbondava secondo il parere di alcuni soverchiamente di dissonanza. Il P. M. Vallotti, ed il Sig. Tartini se ne sono sempre serviti con sobrietà, e per rendere più gustosa la consonanza.

Essendo egli fornito di acuto ingegno, non potè contenersi dentro i limiti della sola pratica, ma volle far transito alla teorica. Scorsi gli elementi di Euclide, studiò moltissimo l'Aritmetica; e specialmente quella degli Antichi. Si suole chiamare armonica una progressione di frazioni, i cui numeratori abbiano un valore costante,

ed

ed i denominatori formino una serie aritmetica, perchè dai primi sei termini della più semplice fra queste progressioni
$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8}$ &c. viene indicato l'ottimo consonante accompagnamento, che suole chiamarsi di Terza maggiore, Quinta, e Ottava, purchè i suoi termini si esprimano per la durata delle loro vibrazioni dei suoni. Egli è per altro vero, che se i suoni si dinotassero col numero delle vibrazioni fatte in tempo pari, come generalmente esprimersi, il predetto accompagnamento sarebbe espresso dai primi sei termini della serie aritmetica
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. Io penso frattanto, che alle semplici ragioni fra le durate delle vibrazioni, le quali ridotte ai numeri fra loro primi non contengano numero impari maggiore del 5., corrispondano per legge di Natura quelle grate sensazioni, che si appellano consonanze; e che quindi rettamente alla descritta serie di frazioni sia stato applicato il nome di armonica. Persuaso il Sig. Tartini dell'utilità della ragione armonica per la Musica, credè di avere scoperto essere il circolo armonico, e passando da meditazione a meditazione, affermò essere il circolo il fondamento dell'armonia, deducendosi dallo stesso l'intero musicale Sistema.

Ecco qualmente il Sig. Tartini pensò di aver dimostrato il circolo armonico. Descritto con qualunque raggio il semicircolo ACB (fig. 1.), si circoscriva allo stesso il il semiquadrato AD, e diviso a piacimento il lato AB nel punto H, e menata per esso HE parallela ad AG, sarà il predetto

AHB

A·H·B dei due segmenti AH, HB diviso per la metà della somma di essi segmenti, o sia pel raggio, medio armonico fra i predetti segmenti. Moltiplicando poscia pel raggio, i due segmenti, onde ne nascano i due rettangoli AE, HD, addiverrà, che fra questi sia medio armonico il prodotto AHB: ma ad esso s'agguaglia il quadrato dell'ordinata HC al circolo; dunque il quadrato dell'ordinata HC è medio armonico fra i due rettangoli AE, e HD, la cui somma forma il semiquadrato AD. Ognuno vede, che per trovare la serie armonica AE, AHB, HD, egli è di uopo unire cerchio, e quadrato circoscritto, e far uso del quadrato dell'ordinata, che propriamente parlando non ci viene somministrato dal circolo, piuttosto che dall'ordinata, che alla figura circolare più strettamente, e naturalmente appartiene. Considerando il circolo semplicemente, e senz'artifizio, egli è patentemente luogo geometrico, somministrandoci l'ordinata media geometrica fra i due segmenti del diametro.

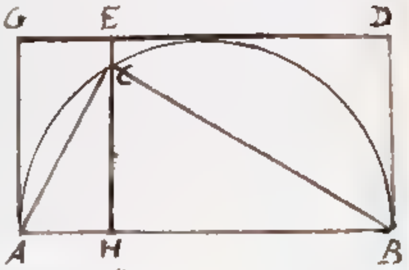


Fig. 1.

Dalle consimili avvertenze si potrebbero fare intorno l'altra proprietà del circolo, asserita dal Sig. Tartini, che se i quadrati dell'ordinata HC, e della corda AC esprimono la durata delle vibrazioni di due suoni; la durata delle vibrazioni del terzo suono, che si ode in aria secondo il bellissimo esperimento del nostro Autore al Pubblico manifestato, viene indicata dal quadrato della corda CB, ch'egli chiama sottesa; imperciocchè il circolo ci dà bene la corda, e l'ordinata, ma non i loro quadrati. Il mentovato fenomeno è regolato

dalla

della legge seguente. Postochè i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari significhino i suoni, ed indicandone due con numeri interi fra loro primi, il più piccolo dei quali sia maggiore dell'unità, si udirà in aria un terzo suono eguale ad essa unità. Ora le durate delle vibrazioni stanno in ragione inversa dei loro numeri in tempo pari; dunque indicando i suoni colle durate delle vibrazioni, se due frazioni, i di cui numeratori pareggino l'unità, ed i denominatori siano numeri interi fra loro primi il minore dei quali superi l'unità, esprimeranno i suoni per esempio del Violino, si sentirà in aria un terzo suono dell'unità dinotato. La dimostrazione di questo fenomeno si può leggere nella mia *Opera Delle Corde, ovvero Fibre elastiche* pag. 225, 226. Quantunque il Sig. Tartini affermi alla pag. 14. del suo *Trattato di Musica*, che si oda in aria il terzo suono $\frac{1}{2}$; nulladimeno avvisato da me col mezzo del P. M. Francescantonio Vallotti, che questo suono dovea pareggiar l'unità, scrisse alla pag. 172. *Il terzo suono, ch'io dico unisono esattamente a $\frac{1}{2}$, quando i due suoni siano in serie armonica, si può dubitare, che sia unisono al tutto, o sia alla prima unità della serie. Di fatto la qualità di questo terzo suono essendo diversa dalla qualità del suono naturale delle corde, questa diversità può cagionare equivoco ad onta del più esquisito senso di udito, e di migliaja di prove.* Facendo il Sig. Serre menzione della sperienza del Sig. Tartini nella sua opera sopra i *Principj dell'Armonia*,

ci

ci assicura, che i terzi suoni prodotti dalle Terze maggiori, e minori corrispondono all'Ottava bassa con quelli del Sig. Tartini.

Sia il diametro circolare $AB = 1$, il segmento $AH = \frac{1}{n}$, il residuo $HB = \frac{n-1}{n}$, onde si abbia $\overline{CB}^2 = \frac{n-1}{n}$, $\overline{AC}^2 = \frac{1}{n}$, $\overline{HC}^2 = \frac{n-1}{n^2}$. Se adunque $\overline{CB}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$ dinotano il suono in aria, e i due del Violino, staranno essi come $\frac{n-1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{n-1}{n^2}$, o sia moltiplicando per n, e dividendo per $n-1$, come 1, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n}$: ma pel canone stabilito se si ha da udire in aria il suono 1, i numeri $n-1$, n hanno da essere interi, e fra loro primi; dunque necessariamente n dee pareggiare un numero intero, ed il segmento $AH = \frac{1}{n}$ ha da essere parte aliquota del diametro $AB = 1$. In questa sola circostanza pertanto si avvera l'asserzione del nostro Autore, e in tutte l'altre è falsa.

Fingasi n uguale alla frazione $\frac{m}{k}$ formata dai numeri fra loro primi m, k. Nelle tre quantità 1, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n}$ si sostituisca $\frac{m}{k}$ in cambio di n, e ne nasceranno le tre espressioni 1, $\frac{k}{m-k}$, $\frac{k}{m}$, e dividendo per k; ci si presenteranno le grandezze $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{m-k}$, $\frac{1}{m}$, che saranno proporzionali a $\overline{CB}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$. Poichè m, k sono numeri fra loro primi, tali esser deggiono altresì $m-k$, m. E voglia il vero, abbiano i numeri $m-k$, m la comune misura espressa dal numero intero g maggiore della unità, ed accaderà che essendo m misurato da g, si dovrà ciò verificare ancora di k, onde $m-k$ venga misurato da g. Il perchè i numeri m, k non sarebbero fra loro primi contro l'ipotesi. Essendo adunque i numeri

$m-k$

m-k, m fra loro primi, i suoni $\frac{1}{m-k}$, $\frac{1}{m}$ proporzionali ad $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$ hanno da generare in aria il suono 1. per la legge da me dimostrata, e non il suono $\frac{1}{k}$ proporzionale al quadrato $\overline{CB}^2$ della sottesa CB.

Si aggiunga, che posta AH parte aliquota di AB, condizione necessaria, acciocché la costruzione del Sig. Tartini ci dia giustamente il terzo suono, i due suoni esempigrazia dal Violino $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$ si ristringono dentro le proporzioni 1:1, 2:1. Quanto più AH é minima, tanto maggiormente i due suoni $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$ si accostano alla equalità, e quando AH $= \frac{1}{2}$ AB, il suono $\overline{AC}^2$ alla $\overline{HC}^2$ sta come 2:1. Che se AH é maggiore di $\frac{1}{2}$ AB, non può essere parte aliquota di AB, e la costruzione del Sig. Tartini non vale per conseguenza, quando i suoni $\overline{AC}^2$, $\overline{HC}^2$ si corrispondono in proporzione maggiore di 2:1.

Prima di dedurre dal circolo l'intero musicale sistema, giudicò il Sig. Tartini necessario dimostrare il sestuplo confine, cioé a dire che la progressione armonica consonante 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$ dove finire al termine $\frac{1}{6}$ senza inoltrarsi alla frazione $\frac{1}{7}$. Nel lungo carteggio, che per istabilire i veri principj dell'armonia tenni con lui l'anno 1760., e che gelosamente conservo, ingenuamente gli significai, che quella, ch'egli riputava dimostrazione, non era tale. In fatti essa é talmente inconcludente, ch'io mi dispenso dal riferirla, e dal confutarla. Si

assuma

assuma dunque come un principio di esperienza, che le ragioni consonanti ridotte a numeri fra loro primi non deggiono ammettere numero impari maggiore del cinque, e che conseguentemente dalla serie armonica consonante si dee escludere il termine $\frac{1}{7}$.

Stimo altresì indispensabile l'informare chi legge della teorica intorno le musiche dissonanze sostenuta dal Sig. Tartini. Stabilisce questa, che le dissonanze derivino dalla proporzione geometrica, ed afferma essere soltanto dissonante quell'accompagnamento, in cui si contengono due intervalli simili riferiti a suoni fra loro non equisoni. Per tal cagione gli accordi della Nona maggiore, e della Settima minore si debbono collocare fra i dissonanti, comprendendo quelle due Quinte, una dell'accompagnamento consonante, e l'altra posta fra la Quinta e la Nona; e queste due Terze minori, una dell'accompagnamento consonante, e l'altra situata fra la Quinta e la Settima minore.

Ho impugnata dimostrativamente questa teorica nel mio _Saggio sopra le Leggi del Contrappunto_ alla pag. 61, e seguenti. E primieramente il necessario requisito di essere generale certamente non compete alla teorica da me riferita. Si adopra in Musica come dissonante l'accordo di Terza Diminuita, Quinta minore, e Settima diminuita, benchè in esse due propor-

zioni

zioni simili non si ritrovino. Si aggiunga la Nona minore all'accordo consonante o per Terza maggiore, o per Terza minore, e l'accompagnamento indubitatamente dissonante non conterrà veruna coppia di intervalli simili, essendo giusta la Quinta dell'accompagnamento consonante, e corrispondendo a questa la Nona minore in Quinta ~~diminuita~~ minore. Addiviene talvolta che si unisca l'Undecima ~~superflua~~ maggiore all'accompagnamento per Terza maggiore, e l'accompagnamento dissonante che ne risulta, non racchiude simili proporzioni. Nell'accordo dell'Undecima abbiamo due Quarte, una fra la Quinta e l'Ottava, l'altra fra l'Ottava e l'Undecima. Nell'accordo dell'Undecima ~~superflua~~ maggiore le nominate due Quarte sono differenti, cioè a dire la prima giusta, e la seconda ~~superflua~~ maggiore. Anzi egli è osservabile, che la Nona minore, e l'Undecima ~~superflua~~ maggiore sono più piccanti della Nona maggiore, e dell'Undecima appunto per il motivo, che contengono due Quinte, e due Quarte dissimili, non potendosi negare, che dalla Quinta ~~diminuita~~ minore, e dalla Quarta ~~superflua~~ maggiore sopranominate non vengano rese più amare.

Oltre a ciò la teorica, di cui favello, non è atta a render ragione dell'indole più o meno mite della dissonanza. I suoni $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ somministrano alla Musica l'ottimo consonante accompagnamento, quantunque in esso si contengano due Ottave $1 : \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$, che suoni non equisoni hanno per fondamento. Risponderebbe il Sig. Giuseppe, che questa è una

prerogativa

prerogativa dell'Ottava, consonanza fra tutte la più squisita: ed io soggiugnerei, che ciò posto mi dovrebbe certamente concedere, che una dissonanza riuscirà tanto meno piccante, quanto più semplici saranno le due simili proporzioni, che nell'accordo dissonante sono rinchiuse. Quindi secondo la presente teorica, la migliore dissonanza dovrebb' essere la Nona maggiore, la peggiore la Settima minore; perchè quella due Quinte, e questa due Terze minori contiene: conseguenza sommamente alla pratica ripugnante. Conchiudasi, che non dalla ragione geometrica, ma bensì da diversa fonte traggono l'origine le dissonanze.

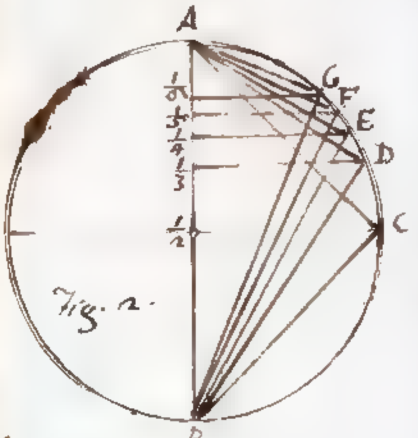
È dissonante quella ragione, che ridotta a numeri fra loro primi contiene un numero impari maggiore del cinque. Aggiugnendo un nuovo suono preso dalla scala del Tuono, in cui la composizione si trova, all'accompagnamento consonante, si hanno le mistiche dissonanze; perchè il suono aggiunto si riferisce a quelli dell'accordo consonante in tre proporzioni, che ridotte a numeri fra loro primi comprendono o tutte, o in parte un numero impari più grande del cinque. La proporzione geometrica giova per rendere nel loro genere più miti le dissonanze, scemando il numero degli intervalli dissonanti. La Nona maggiore per esempio forma dissonanza colla base, e colla Terza, ma non colla Quinta, alla quale in una simile consonanza risponde. Quind'austera

riesce

* La Scala del Modo maggiore, o minore contiene sette corde, tra delle quali formando il consonante accompagnamento, resta che collo stesso si possano unire quattro corde, che al Basso di un accordo fondamentale si riferiscono in Settima, in Nona equisona alla Seconda, in Undecima equisona alla Quarta, in Terzadecima equisona alla Sesta. Con questo ordine le dissonanze si devono gradatamente usare con maggiore riserva, perchè nascono dalla divisione d'intervalli, che vanno scemando di perfezione, comparandosi dalla Settima la Quarta $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, dalla Nona la Terza maggiore $\frac{1}{8}, \frac{1}{10}$, dalla Undecima la Terza minore $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, e finalmente

nasca la Nona minore, a cagione che forma dissonanza non solo colla base, e colla Terza ma ancor colla Quinta, acciò si riferisca ~~risponda~~ in Quinta ~~diminuita~~ minore.

* Mi faccio presentemente ad esaminare, se rettamente col suo metodo il Sig. Giuseppe Tartini determini le sue parti essenziali del Contrappunto, deducendole dalla figura circolare. Descritto un circolo col diametro AB (Fig. 2.) uguale all'unità primo termine della serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, segna nel diametro stesso gli altri cinque termini della nominata serie. Dal punto estremo dei segmenti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ &c. tira le ordinate al circolo $\frac{1}{2}$C, $\frac{1}{3}$D, $\frac{1}{4}$E, $\frac{1}{5}$F, $\frac{1}{6}$G, indi le corde AC, AD, AE, AF, AG corrispondenti ai detti segmenti, e finalmente le suttese BC, BD, BE, BF, BG relative ai complementi al diametro. Essendo nel circolo del diametro AB = 1. i quadrati delle corde, e delle suttese uguali ai sottoposti segmenti del diametro, la descritta costruzione ci somministra tre serie formate dai quadrati delle corde, delle suttese, e delle ordinate al circolo, nelle quali giudica il Sig. Tartini, che si contengano le parti tutte più essenziali del Contrappunto:



Prima serie dei quadrati delle corde.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

Seconda serie dei quadrati delle suttese.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$.

Terza serie dei quadrati delle ordinate

$\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}$.

Che dinotati i suoni per tempi delle vibrazioni

dine vibrazioni, la prima serie esponga l'accompagnamento consonante per Terza maggiore nell'ottima forma disposto, non si può mettere in controversia, ma si può bene muover quistione, se le due serie seconda, e terza contengano e dovere le rimanenti parti essenziali del Contrappunto.

E principiando dalla seconda serie, da questa il Sig. Tartini deriva l'origine del Sistema delle Cadenze, ch'io soglio chiamare Sistema di melodia, e dell'accompagnamento consonante per Terza minore. Ora se la seconda serie fosse la vera origine del Sistema di melodia, e dell'accompagnamento per Terza minore, dovrebbe contenere i suoni tutti, ond'essi sono composti: ma tutti questi suoni non li contiene; dunque alla seconda serie non si può attribuire la legittima, e metodica origine del Sistema di melodia, e dell'accordo per Terza minore. Manca il suono principalissimo, ch'è l'unità, fondamento e base e del Sistema di melodia, e dell'accompagnamento per Terza minore, la quale unità nè c'entra, nè ci può entrare nella seconda serie. Nascendo questa dal sottrarre la prima serie dall'unità; allora solo l'unità troverebbe luogo nella serie seconda, quando la prima fosse continuata all'infinito: nel qual caso all'ultimo termine uguale a nulla della progressione armonica corrisponderebbe l'unità nella seconda serie. Ripugna alla natura dell'accompagnamento consonante per Terza maggiore, il quale non deve inoltrarsi alla frazione $\frac{1}{7}$, che la prima serie progredisca

all'

finalmente dalla Terzadecima la Terza minore calante $\frac{1}{72}$ $\frac{1}{14}$, a cui molto si accosta la ragione Diatonica 32 : 27. Nel citato _Saggio_, a cui può ricorrer chi legge, ho spiegata più accuratamente la accennata dottrina.

all'infinito; e quindi non è mai possibile, che l'unità abbia luogo nella seconda serie, e che per conseguenza questa sia la vera origine del Sistema di melodia, e dell'accordo per Terza minore.

Si aggiunga, che nascendo i due Modi maggiore, e minore da tre accordi o per Terza maggiore, o per Terza minore fondati sul Sistema di melodia, è mancante il metodo del Sig. Tartini; perchè insieme col detto Sistema non ci dà gli accordi ad esso applicati.

Su via però si conceda alla seconda serie l'aggiunta dell'unità; di modo che da essa si deduca l'accompagnamento per Terza minore 1, $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$. Affermerò non ostante, che il detto accompagnamento non tragge la sua sorgente dalla serie seconda; perchè questa non lo determina nella ottima maniera ordinato, potendo esso acquistare migliore disposizione, trasportando all'Ottava alta il suono $\frac{2}{3}$, onde si abbia l'aggregato più semplice di suoni 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Appresso io dimando, se la seconda serie ampliata coll'unità somministri solamente l'origine al Sistema della Cadenza, ed all'accordo per Terza minore, o più anche a qualche altro Sistema. Se si aderisca alla prima proposizione, dimando nuovamente per qual motivo ci sta nella seconda serie l'inutile termine $\frac{4}{5}$. Che se non essendo superfluo il termine $\frac{4}{5}$, la nostra serie contiene un altro Sistema, come di fatto contiene l'accompagnamento per Terza maggiore 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$; torno a ricercare il perchè ce lo dia

disposto

disposto in una maniera, che non è l'ottima.

Riserva l'ultimo luogo alla riflessione di maggiore rilievo. Condanna il nostro Autore meritamente nella Dissertazione De' Principj dell' Armonia Musicale contenuta nel Diatonico Genere alla pagina 25. 91 il Sistema di M. Rameau, perchè lo guida a determinare l'accompagnamento $7\,{}^{5}_{3}6$ come relativo a C^{5}_{3}. La teorica di M. Rameau ripugna a ciò, ch'egli medesimo praticava; imperciocchè non si troverà mai nelle di lui composizioni, ch'egli sia passato in Ffaut con quattro b molle alla chiave, ma bensì in Alamire senza alcun accidente alla chiave, ch'è il relativo alla diatonica naturale del Tuono di Csolfaut. Se dunque un buon Sistema ha da determinare l'accompagnamento per Terza minore A^{5}_{3} in qualità di relativo all'accompagnamento per Terza maggiore C^{5}_{3}; come mai può giudicare il Sig. Tartini per bello e per buono il suo Sistema, che lo conduce alli accordi per Terza minore $C\,{}^{5}_{3}6$? Possibile che quel lume, che gli ha servito così bene di scorta per discernere gli errori altrui, si spenga poi, quando si tratta di giudicare le cose proprie?

Non voglio lasciar di riferire l'artifizio, di cui si serve il Sig. Giuseppe per separare dalla seconda serie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ l'accompagnamento per Terza minore $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$. Sul lato AG = 1 (fig. 3.) si descriva il quadrato AO, e diviso AG in sei parti eguali AB, AC, CD, DE, EF, FG, si

tirino

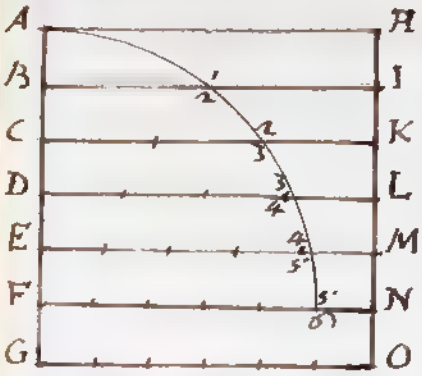


Fig. 3.

tirino normali ad A G le rette B I, C K, D L, E M, F N. Divisa B I per metà, C K in tre parti uguali, D L in quattro, E M in cinque, F N in sei, e delineato col raggio F $\frac{5}{6}$ il quadrante $\frac{5}{6}$ A, e ne nascerà ch'esso passi sopra i punti delle divisioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, e non già sopra gli altri due $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; di modo che separi dalla seconda serie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ l'accompagnamento per Terza minore $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ ....

Osservi chi legge l'incostanza del metodo. Nel dimostrare il circolo armonico, e nel determinare e il terzo suono, e le parti essenziali del Contrappunto, considera sempre il valente Professore i quadrati delle ordinate al circolo; e poi nel separare dalla seconda serie l'accordo per Terza minore, si attiene alle semplici ordinate. Inoltre per avere la detta seconda serie assegna al circolo il d.o raggio $= \frac{1}{2}$, e per sceglier da essa l'accordo per Terza minore, pone in opera il circolo del raggio $\frac{5}{6}$ ....

Mi richiese il Sig. Giuseppe, che da me si assegnasse la ragione, per cui nella descritta costruzione la periferia circolare passi solo per le divisioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e lasci fuori le due $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. La ricercata ragione dipende dalla natura del cerchio, e dalla proprietà del numero 5. prescelto per le parti componenti il raggio. Nel circolo il quadrato del raggio s'eguaglia ai due quadrati dell'assissa, e dell'ordinata; e poichè il quadrato del numero 5. cioè il 25. pareggia i due 16, 9, la cui

radici

radici 4, 3; ne segue, che all' assissa $FC = \frac{3}{10}$ corrisponde l' ordinata $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, e che all' assissa $FA = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ci corrisponda l' ordinata $\frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ Ecco adunque che il circolo passa per le divisioni $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Non può succedere altrettanto in riguardo alle divisioni $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; perché detratto dal quadrato $\frac{25}{36}$ del raggio $\frac{5}{6}$ prima il quadrato $\frac{1}{36}$ dell' assissa $FE = \frac{1}{6}$, indi il quadrato $\frac{4}{36}$ dell' assissa $FD = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, restano i quadrati $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ delle ordinate condotte pei punti E, D, ed i lati $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{7}{12}}$ di questi quadrati; che sono grandezze irrazionali, ed inesprimibili in numeri, non possono esser eguali alle frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$. L' allegata è l' unica ragione anteriore, in forza di cui così succeda, e così debba succedere, richiesta dal Sig. Tartini, nè da qualunque Geometra se ne addurrà mai verun' altra.

Disponendo ordinatamente il raggio del circolo, e le due ordinate razionali, abbiamo la serie di frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, che come ho notato di sopra, ci pone sotto gli occhi l' accompagnamento E^b G c di Terza e Sesta ambo maggiori, il quale è bensì consonante, ma non perfetto, siccome privo del Basso fondamentale. Per tal motivo il Sig. Tartini ha divisa in sei parti, e non in cinque l' unità, dovendosi essa; che non ha luogo nel circolo, aggiugnere alle tre frazioni determinate dal circolo, acciocchè ci si presenti il perfetto consonante accompagnamento di Terza minore, Quinta, e Ottava

$1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, o sia C E^b G c.

Pregai lo stimatissimo Sig. Giuseppe a tener dietro al filo del seguente discorso, il quale sarebbe stato idoneo certamente a convincerlo, quando avesse avuto cuore di spogliarsi dalle invecchiate prevenzioni.

Ci somministra il descritto quadrante oltre il raggio $\frac{5}{6}$ le quattro ordinate $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{7}{12}}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, e giacché la prima, e la seconda si escludono, la terza, e la quarta si ammettono; egli è chiaro, che per determinare l'accompagnamento $1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, non basta il solo principio del circolo, ma bisogna dar luogo ad un altro principio, ed è, che nell'armonia non si accettino salvo che quantità razionali.

Si aggiunga, che il raggio, e le due ordinate razionali ci danno l'accompagnamento derivato E^b G c, il quale può ricevere un ordine migliore, trasportando il suono c all'Ottava bassa. Si cavi adunque la conseguenza, che i soli principj del circolo, e delle ordinate razionali non ci guidano all'accordo fondamentale per Terza minore, e che si rende necessaria l'introduzione di un terzo principio, cioè che le proporzioni formanti esso accordo siano nella miglior maniera disposte.

E qui direbbe il Sig. Tartini, che a buon conto al circolo non si può negar la prerogativa di assegnare il numero 6. per limite del consonante accompagnamento di Terza minore e Quinta. Rispondo, che ciò potrebbe in qualche modo concedersi,

quando

quando il solo quadrato 25: fosse divisibile in due quadrati; di modo che unicamente col dividere il raggio in cinque parti ne ri= sultassero due ordinate razionali. Infiniti sono quei numeri, i cui quadrati essi pos= sono in due quadrati dividere, e per ora mi serva di esempio il numero 13., il quadra= to 169. dal quale si compone dai due 144., 25., che hanno per radici i numeri 12, 5. Diviso pertanto il raggio in 13 par= ti, all'assissa 5 ci corrisponderà l'ordinata 12, e all'assissa 12 l'ordinata 5., ed il rag= gio, e le due ordinate formeranno la pro= gressione 13, 12, 5. Dimando se un tale accordo è consonante, o dissonante. Se consultiamo il giudizio del senso; esso lo spe= rimenta dissonante: ma se badiamo ai soli premessi principj, dovrebbe riporsi tra i consonanti, essendo rappresentato dal rag= gio del circolo, e da due ordinate razionali condotte per que' punti, che separano l'una dall'altra le parti eguali quinta e sesta, duodecima e decimaterza, nelle quali si è distribuito il raggio del circolo.

E quindi egli è di uopo ricorrere ad un quarto principio, vale a dire che le ra= gioni costituenti un consonante perfetto ac= cordo non siano solamente razionali, ma semplici, ed i limiti, ai quali si estenda ques= ta semplicità, devono determinarsi col mezzo della esperienza, la quale ci inse= gna, che ridotte le proporzioni consonanti a numeri fra loro primi, non devono con= tenere numero impari maggiore del cinque.

Ne'

Nè giova il soggiungere, che fra quei numeri 5, 13, &c., i cui quadrati sono in due quadrati divisibili, bisogna scegliere il più semplice 5; imperciocchè prescelto un tal numero, ed essendo 4, 3 le radici dei quadrati 16, 9, che compongono il 25, si determina la serie 5, 4, 3, in cui il numero impari più composto si è il cinque. Tanto è adunque l'ammettere fra i numeri 5, 13, &c. il solo cinque, quanto lo stabilire il sovrapposto questo principio.

Veniamo ora alla conseguenza, che riesci strana, ed inaspettata al Sig. Tartini, il quale ha durato tanta fatica per ritrovare nel circolo il fondamento dell'armonia. Bastando per determinare ambedue gli accompagnamenti consonanti perfetti i soli principj; che le ragioni, che li compongono, contengano oltre l'unità i soli numeri impari 3, e 5, e che queste ragioni siano nella miglior maniera disposte relativamente al Basso, con cui si fanno i principali paragoni, si rende totalmente inutile, e superfluo il principio del circolo, che ha tanto che fare coll'accordo de' suoni, quanto coll'accordo dei colori, dei sapori, e degli odori. Gl'insinuai di credermi, che quelle che giudicava dimostrazioni, non eran tali, e che se non credeva a me, le facesse esaminare da qualunque Fisico-Matematico, al quale non mancasse una fondata cognizione della Musica pratica.

Opponeva il Sig. Giuseppe, che

fa

fa di mestieri dimostrare il sestuplo con-
fine, e non assumerlo dalla esperienza.
E se questa dimostrazione non ci fosse?
Io sono persuaso, che il numero 5. fra gli
impari sia l'ultimo consono; perchè tale,
e tanta, e non più è l'attività dell'orecchio
umana, e credo che Iddio Signore possa
formare un sensorio più fino del nostro,
ed atto a giudicare con maggior precisio-
ne della proporzione fra la durata di due
vibrazioni spettanti a diversi suoni, ris-
pettivamente a cui riuscisse consonante
l'accompagnamento $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$.
E se così è, come mai si stabilirà il confine
di un consonante perfetto accompagna-
mento; se non col mezzo della esperienza?

I due fondamentali consonanti ac-
compagnamenti dedotti dai miei principj
sono forniti di quella più scrupolosa unità,
di cui sono capaci le cose composte di parti.
Una quantità formata di parti sarà dotata
di perfetta unità, quando l'unione delle
parti stesse corrisponda esattamente a quel
fine, per cui s'è organizzato il composto.
Così un oriuolo è uno; perchè le ruote,
la molla, e gli altri ordigni, che lo compon-
gono, sono tutti diretti al fine di segnar
l'ore con esattezza. Hanno per fine gli accor-
di consonanti fondamentali $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$;
$1, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$ di dilettare compiutamente l'
orecchio, e perchè corrispondono a questo
fine con una perfezione condotta al massimo,
contengono in se stessi una rigorosa unità.
E voglia il vero qualunque alterazione in
essi si faccia, torna certamente in loro
discapito. Se vario essenzialmente la
disposizione

disposizione dei suoni, si cangiano da fondamentali in derivati: se levo il suono $\frac{1}{3}$ li privo della consonanza perfetta: se levo il suono $\frac{1}{5}$, ovvero $\frac{5}{81}$, li privo della consonanza imperfetta: e finalmente se aggiungo un nuovo suono non aquisono ai tre componenti, si tramutano in accompagnamenti dissonanti.

Non posso aderire al Sig. Giuseppe, quando argomenta, che se la consonanza, e le dissonanze dipendessero dalla maggiore o minore semplicità delle proporzioni, in cui si riguardano i tempi delle oscillazioni; non differendo questa semplicità, se non nel più, e nel meno, ed il più ed il meno non cangiando specie, ne seguirebbe, che ammesso siccome consonante l'intervallo $1 : \frac{1}{5}$, tali dovrebbero altresì essere $1 : \frac{1}{9}$, $1 : \frac{1}{15}$ &c. L'equivoco dipende dal confondere la cagione coll'effetto. Considerate le nominate semplici relazioni come causa dell'armonia, egli è certo, che in riguardo alla semplicità differiscono soltanto nel più, e nel meno, e che per questo titolo non si cangia specie. Ma quella specie, che non si muta nella causa, si può ben variar nell'effetto, cioè a dire nella sensazione, che si risveglia nell'anima, la quale trova dolce l'intervallo $1 : \frac{1}{5}$, agro l'intervallo $1 : \frac{1}{15}$. Il più o meno sale posto in una vivanda non cangia specie; ma varia bene di specie la sensazione ch'io provo grata, quando il sale è in dose aggiustata, ingratissima, quando il sale abbonda soverchiamente. Un fuoco o

piccolo, e grande non muta specie; e pure il fuoco piccolo mi riscalda soavemente, il grande mi scotta. Ora se in tutti gli altri sensi, non cangiando specie la causa, cangia specie la sensazione; perché nel senso dell'udito non deve altrettanto succedere? e se negli altri sensi la sola esperienza si è quella, che determina il limite, passato il quale la sensazione comincia a divenire molesta; per qual motivo si dee abbandonare una tal guida, quando si tratta dell'organo dell'udito? Questi sono discorsi evidentissimi, contro dei quali non saprei cosa di massiccio si potesse allegare.

Pretende il Sig. Tartini, che le dissonanze ci diano diletto niente meno delle consonanze. Dilettano è vero le dissonanze, ma in figura di condimento; perché col loro agretto fanno spiccare a maraviglia la soavità delle consonanze. Una composizione senza dissonanze riuscirebbe insipida, non altrimenti che una vivanda senza sale. In questo senso la proposizione è vera verissima. Non affermerei altrettanto della stessa, mentre s'intendesse assolutamente, e si pretendesse, che un accompagnamento dissonante considerato da se solo lasciasse pago l'orecchio. Come mai da se sola può appagare la Nona, se per renderla accetta al senso, bisogna prima prepararla, ed indi risolverla? Piace adunque perché posta in mezzo da due accompagnamenti consonanti, e perché serve loro di condimento.

Riassumendo il detto sin qui intorno alla seconda serie, si conchiude che essa non è la legittima metodica origine del Sistema della

dalla Cadenza, ch'io chiamo Sistema di melodia, e dalli accordi per Terza minore, siccome quella ch'è mancante di un suono necessario, e principalissimo, che ne contiene un superfluo, che assegna al detto accordo una disposizione, che non è l'ottima, che in cambio dell'accompagnamento A^{5}_{3} relativo a C^{5}_{3} ci pone sotto gli occhi l'accordo $C^{5}_{3\,6}$ ed a cui finalmente nulla giova, che questi accordi privo del Basso fondamentale sia dalla stessa separato col mezzo del circolo.

Passo alla discussione della terza serie, e cerco se da essa rettamente si esprima il dissonante Sistema. Nasce la terza serie dal moltiplicare insieme i termini corrispondenti della serie prima, e seconda, ch'è quanto a dire dal prendere al di sopra dell'intervallo della prima serie il corrispondente intervallo della serie seconda, o pure a rovescio dal sovrapporre l'intervallo della serie prima al corrispondente della serie seconda.

Ci propone in primo luogo la terza serie come dissonanza la ragione $\frac{1}{4}$, la quale per comun consenso di tutti i Musici antichi, e moderni non solo non è dissonanza, ma perfettissima consonanza, e siccome tale ha luogo nell'accompagnamento consonante $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$. Una conseguenza così ripugnante basta a gittare irreparabilmente a terra il mal fondato Sistema.

Segue il secondo termine $\frac{2}{9}$ esprimente la Nona, il quale nasce dalla moltiplica delle due frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Se la Nona si riferisca all'accompagnamento C^{5}_{3}, trae l'origine dal prendere la Quinta $\frac{2}{3}$ al d.o sopra

dal

del suono $\frac{1}{3}$ proprio del detto accompagnamento. Che se la Nona si riferisca all'accompagnamento $C\overset{5}{3}6$; ritrovandosi in esso, come il Sig. Tartini lo ricava dalla seconda serie, la Quinta $\frac{2}{3}$, e non la Duodecima $\frac{1}{3}$, si determina la nominata dissonanza col sovrapporre la Duodecima $\frac{1}{3}$ alla Quinta $\frac{2}{3}$. Quindi ci si presenta la serie $1, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}$, nella quale non apparisce quella proporzione geometrica continua, o discreta, da cui egli deriva la dissonanza. Assegnata all'accompagnamento per Terza minore la più elegante forma $1, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; allora sì che nell'accordo della Nona $1, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ si insinua la progressione geometrica continua $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$. Ho notato ciò per far toccare con mano, che il metodo del nostro celebre Autore non è né pur coerente a se stesso.

Mi inoltro al terzo termine $\frac{3}{16}$, che dinota l'Undecima, ed è il prodotto dei due fattori $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Rispettivamente all'accordo C^{3} l'Undecima è originata dal collocare la Quarta $\frac{3}{4}$ sopra la doppia Ottava $\frac{1}{4}$, onde ne provenga la serie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}$, che in se contiene la progressione geometrica continua $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}$. Seguitando le traccie del metodo del Sig. Tartini, sembra che all'accompagnamento $C\overset{5}{3}6$, nel quale non ha luogo né il suono $\frac{1}{4}$, né il suono $\frac{3}{4}$, non possa unirsi l'Undecima $\frac{3}{16}$. Ma sorpassando anche ciò, ed accoppiando una tal dissonanza all'accompagnamento per Terza minore col mezzo del circolo separato dalla seconda serie, avremo la progressione $1, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{16}$, in cui non ben si palesa la progressione geometrica continua, o discreta, nella qual egli giudicava

consistere

consistava l'essenza della dissonanza. Si ovviava a questo disordine alzando all'Ottava il termine $\frac{2}{3}$, ed aggiugnendo il termine $\frac{1}{4}$, di modo che ne risulti il seguente accordo 1, $\frac{5}{81}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{101}$, e si vegga di quanti puntelli ha bisogno il poco solido, e mal fondato Sistema.

Inconvenienti ancora maggiori si incontrano nel quarto termine $\frac{4}{25}$ generato dalla moltiplica di $\frac{1}{5}$ in $\frac{4}{5}$. Se una tal dissonanza dal Sig. Giuseppe chiamata Duodecima superflua, che per sua confessione giunge affatto nuova nel musicale Sistema, dovesse ammettersi, apparterrebbe all'accompagnamento C3^5 solamente, e non all'accordo C$3^5 6$; imperciocché le ragioni $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ oltre all'essere amendue escluse dal detto accordo, rifiutano totalmente l'unione con esso, ripugnando l'accoppiamento della due Terze minore, e maggiore riferite alla stessa base. Conoscono i Maestri le sole quattro specie di dissonanze, cioè la Settima, la Nona, l'Undecima, e la Terzadecima. Ora che fa il metodo del nostro Autore? In cambio della Terzadecima, che tutto giorno si pratica nel Contrappunto, introduce la Duodecima superflua, che non si è mai usata per l'addietro, nè si userà mai in avvenire lecitamente. Lascio che giudichino gl'Intelligenti di Musica qual assurdo sia questo. Si servono talvolta i Maestri nel Tuono A per Terza minore della Quinta superflua C G$^{\#}$ in qualità di consonanza alterata, e la fanno indispensabilmente ascendere in A. Il farla discendere in G, come il

Sig.

Sig. Tartini prescrive, quando la risolve in figura di dissonanza, si stima un inescusabil errore.

Tocca l'ultimo posto alla Decimaquarta minore $\frac{5}{3\cdot 01}$, che riconosca la sua origine dal prodotto di $\frac{1}{01}$ in $\frac{5}{01}$. Ponendo sopra il suono $\frac{1}{01}$ proprio dell'accordo C^{5}_{3} la Terza minore $\frac{5}{01}$, si aggiunge al detto accordo la Settima, o Decimaquarta minore B^{6}. Ecco un nuovo sbaglio del metodo. All'accompagnamento C^{5}_{3} fondato sulla prima corda del Tuono C per Terza maggiore corrisponda la Settima maggiore, e non la minore. Conciossiaché nell'accordo $C^{5}_{3\,6}$ contenuto nella seconda serie ha luogo la Terza minore $\frac{5}{01}$, e non la Decimanona $\frac{1}{01}$, si determina la Decimaquarta minore rispettivamente ad esso accordo sovrapponendo alla Terza minore $\frac{5}{01}$ l'intervallo $\frac{1}{01}$. La serie, che ne proviene, si è la seguente

1, $\frac{5}{01}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3\cdot 01}$, in cui non apparisce almen chiaramente la replicazione della Terza minore. Si renderebbe manifesta la detta replicazione ordinando l'accordo nella seguente maniera

1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4\cdot 01}$, $\frac{1}{01}$, $\frac{5}{3\cdot 01}$, nel quale nasce la Decimaquarta minore dal collocare $\frac{5}{01}$ sopra $\frac{1}{01}$, e contiene due Terze minori nei siti: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4\cdot 01}$; $\frac{1}{01}$, $\frac{5}{3\cdot 01}$. Una tale disposizione dell'accompagnamento per Terza minore si è quella, che gli ho assegnata nella mia prima Scrittura indirizzata all'ornatissimo Sig. Principe Angelo Gabrielli, e che dal Sig. Giuseppe è stata tanto disapprovata, quantunque, aggiunta la

Decimaquarta

Decimaquarta minore $\frac{5}{36}$, sia favorevole alla proporzione geometrica sommamente da lui predilatta in riguardo alla dissonanza. Ho notato ciò per far conoscere l'incostanza, e le perpetue contraddizioni del metodo.

Aggiungo, che eccettuata la Decimaquarta minore $\frac{5}{36}$, le altre dissonanze usate nel Contrappunto sono collocate fuori di nicchio, dovendo trasportarsi tanto la Nona, quanto l'Undecima all'Ottava alta, onde abbraccino le ragioni $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{32}$. La Decimaquarta minore è situata bene, essendo assai prossimo il rapporto $\frac{5}{36}$ al semplice $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$, e godendo essa dissonanza in grazia di un tale avvicinamento degli amplissimi privilegi.

Considerando la Nona secondo l'idea del Sig. Tartini, cioè come originata da una serie geometrica continua, chiaramente si vede, che la serie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ comincia dal suono fondamentale 1, ed è più semplice della serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$, la quale ha principio dal suono $\frac{1}{2}$, che rigorosamente parlando non è fondamentale, usandosi come tale soltanto per la ragione, che $\frac{1}{2}$ è equisono ad 1. Inoltre l'intervallo $1 : \frac{1}{9}$ non introduce terzo suono, ed al contrario il rapporto $1 : \frac{2}{9}$ fa sentire il terzo suono $\frac{1}{9}$, che riduce la proporzione $2 : \frac{2}{9}$ alla forma $1 : \frac{1}{9}$ da me assegnata alla Nona. Osservo parimente, che nella progressione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ &c. la prima introdotta si è l'equisonanza $\frac{1}{2}$, indi la consonanza perfetta

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$, pòscia la consonanza imperfetta $\frac{1}{5}$, a cui vien dietro la dissonanza privilegiata $\frac{1}{7}$; di modo che una ragione s'incontra tanto più tardi, e tanto più lontana dalla base 1, quanto è meno perfetta. La Nona, dissonanza più piccante della Settima minore, e che con tutto il rigore va maneggiata, si adatta ad una tal legge, mentre ad essa si assegni il rapporto $\frac{1}{9}$. Se la stessa abbracciasse la proporzione $\frac{2}{9}$, si scoprirebbe più grave non solo della dissonanza privilegiata $\frac{1}{7}$, ma ancora della consonanza imperfetta $\frac{1}{5}$.

Anche l'Undecima si pone in opera colla stessa circospezione della Nona, e quando si esprimesse per $\frac{3}{16}$, riuscirebbe più grave della dissonanza privilegiata $\frac{1}{7}$, al qual disordine non è soggetta la ragione $\frac{3}{32}$.

Per un pari motivo la Terzadecima minore si esporrà per $\frac{5}{64}$, e la maggiore per $\frac{3}{40}$.

Con un discorso analogo a quello da me usato in riguardo alla Nona si prova, che la Quartadecima maggiore si deve piuttosto esprimere per $\frac{1}{15}$, che per $\frac{2}{15}$. Ammessa la prima ragione, trovo nell'accordo della nostra dissonanza le geometriche proporzioni $1 : \frac{1}{3} :: \frac{1}{5} : \frac{1}{15}$, $1 : \frac{1}{5} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{15}$, che sono più semplici di quelle $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: \frac{1}{5} : \frac{2}{15}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{5} :: \frac{1}{3} : \frac{2}{15}$, che hanno luogo nel detto accordo, qualora la Decimaquarta maggiore si dinoti per la frazione $\frac{2}{15}$.

Appresso

Appresso il valore $\frac{1}{15}$ non apre l'adito al terzo suono; laddove il valore $\frac{2}{15}$ cagiona il terzo suono 2, a cui la dissonanza $\frac{2}{15}$ si riferisca nella proporzione da me stabilita $1 : \frac{1}{15}$.

Dispongo qui sotto ordinatamente le ragioni dissonanti.

Settima minore $\frac{5}{36}$ assai prossima al rapporto semplice $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$, a cui l'orecchio la riferisce.

Nona $\frac{1}{9}$.

Undecima $\frac{3}{32}$ assai prossima al rapporto $\frac{1}{11} = \frac{3}{33}$, a cui viene riferita dal senso.

Terzadecima minore $\frac{5}{64}$ molto vicina alla ragione $\frac{1}{13} = \frac{5}{65}$, alla quale l'udito la riferisce.

Terzadecima maggiore $\frac{3}{40}$ assai vicina al valore $\frac{1}{13} = \frac{3}{39}$, di cui nel senso si sveglia l'idea.

Quartadecima maggiore $\frac{1}{15}$.

Convengono questi nomi alle nostre dissonanze paragonate col termine $\frac{1}{4}$ della serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c., al quale si appoggia l'usuale denominazione di Terza, Quinta, e Ottava degli accompagnamento consonante.

Il Sig. Tartini stesso confessa, che l'orecchio riferisca la Settima minore al semplice rapporto $\frac{1}{7}$. Che i veri valori della Nona, e della Quartadecima maggiore siano $\frac{1}{9}, \frac{1}{15}$, l'ho provato evidentemente. Ora ciò posto, sembrami fuor di dubbio, che siccome $\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{15}$ sono termini della serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ &c., dalla

stessa

stessa serie altresì si abbiano a prendere le ragioni $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, alle quali il sensorio rife=risce l'Undecima, e la Terzadecima, onde si abbia la progressione regolare $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{15}$; i cui termini esprimono o esattamente, o prossimamente le dissonan=ze. Confermo questa verità con una rifles=sione, che sembrami importantissima, ed atta a decidere interamente la controversia. Il Sistema Diatonico assegna alla Settima minore la ragione $\frac{5}{36}$, ch'è veramente dissonante, siccome equivale alla ragione $\frac{5}{9}$. Non così interviene delle proporzioni $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{64}$, $\frac{3}{40}$ appropriate all'Undecima, e alla Terzadecima, le quali considerate in sè stesse sono consonanti, siccome equivalgo=no ai rapporti $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, e vanno collo=cate fra le dissonanze, solamente quando ag=giungendole all'accompagnamento conso=nante, lo cangiano in dissonante. Avendo pertanto mira ai mentovati rapporti, si dovrebbe conchiudere, che l'Undecima, e la Terzadecima sono dissonanze più miti della Settima minore, e che se si danno dissonanze privilegiate, queste debbono essere certamen=te l'Undecima, e la Terzadecima. Essendo l'esperienza contraria ad una tal conseguen=za, chiaramente si scopre, che non alle ra=gioni Diatoniche $\frac{5}{36}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{5}{64}$, $\frac{3}{40}$, la prima delle quali è una derivazione della Nona, e le tre seguenti dipendono dall'accompagna=mento consonante; ma bensì alle ragioni fon=damentali $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$ si appoggia il giudi=cio del senso, quando preferendo la Settima

alle

all' Undecima, ed alla Terzadecima, accordata a quella varj privilegj, che accomunarsi a questa lo disgusterebbero grandemente.

Epilogando i principali sbagli in riguardo alla dissonanza avvertiti nel metodo, che combatto, fa esso apparire fra le dissonanze la Quadrupla $\frac{1}{4}$, che per consenso di tutti i Maestri è perfettissima consonanza. Omette le due Terzadecime minore, e maggiore, ed in loro vece introduce la Duodecima superflua, dissonanza affatto sconosciuta. Adatta la Decimaquarta minore all' accompagnamento C^{3} fondato sulla prima corda del Tuono C per Terza maggiore, mentre allo stesso realmente corrisponde la Decimaquarta maggiore. Finalmente determina un' Ottava più gravi del dovere le dissonanze Nona, ed Undecima.

Attribuisce il Sig. Tartini alla terza serie la prerogativa altresì di somministrare certi intervalli, di cui la Musica moderna si serve. Fra i termini $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{25}$ abbiamo la Quinta superflua $C\,G^{\#}$, in cui si corrispondono la terza corda naturale C, e la settima artificiale $G^{\#}$ del Tuono A per Terza minore. Il suo compimento all' Ottava si è la Quarta diminuita $G^{\#}C$. I termini $\frac{3}{101}$, $\frac{4}{25}$ formano la Seconda superflua $F\,G^{\#}$, per la quale differiscono la sesta corda naturale F, e la settima artificiale $G^{\#}$ del Tuono or or nominato, e che unita colla Settima diminuita $G^{\#}f$ compie l' Ottava. Per ultimo i termini $\frac{4}{25}$, $\frac{5}{301}$ ci danno la Terza diminuita

$G^{\#}A^{b}$

$G^{\#}$ B^{b}, in cui si riferiscono le due corde arti-
ficiali settima $G^{\#}$, nona A^{b} del Tuono A per
Terza minore, ed ha per compimento all'
Ottava la Sesta superflua B^{b} $G^{\#}$.

Osserva in primo luogo, che in tanto la terza seria somministrava i notati intervalli, in quanto che incorre nello inescusabil errore di darci la Duodecima superflua C $G^{\#}$ in cambio della Terzadecima C A. Corretto un tale sbaglio, svanirebbero i menzionati intervalli.

È da avvertirsi in secondo luogo, che nel detto Tuono A si adoprano parimente la Seconda superflua C $D^{\#}$, la Terza diminuita $D^{\#}$ F, le quali non ci vengono suggerite dal nostro metodo. Non si renderà mai la ragione, per cui fra le due corde artificiali, seconda B^{b}, quarta $D^{\#}$, il metodo ci ponga avanti quella, ch'è di non molta importanza, e tralasci questa, che ad esso Tuono è più necessaria.

Oltre di che non basta l'assegnare i sopraddetti intervalli, ma bisogna di più far vedere in quali accompagnamenti si adoprano, e sono $C^{5\#}_{3}$, $G^{\#}{}^{5}_{3}$, $D^{\#}{}^{5}_{3}{}^{6}$, $A^{5}_{3}{}^{9}$. Di questi accordi un buon metodo dovrebbe arricchire la Musica, e per conseguenza non si può chiamar buono quel metodo, che non li determina. Tralascio parimente l'accordo B^{5}_{3} di Terza minore, e Quinta diminuita, il quale può competere alla corda B seconda del Tuono A per Terza minore, settima del Tuono C per Terza maggiore.

Lascio in ultimo luogo la massima della ripugnanza, ed è, che le due serie

seconda

seconda, e terza mutuamente si contraddicono; imperciocchè la seconda serie contiene in se stessa l'accompagnamento $C\,{}^{5}_{3}6$ fondato sulla prima corda del Tuono C per Terza minore, e la terza serie comprende gli intervalli C G$^{\#}$, F G$^{\#}$, G$^{\#}$ B$^{\flat}$, i quali competono non al Tuono C, ma al Tuono A per Terza minore. Essendo quest'ultimo Tuono relativo al Tuono C per Terza maggiore, più chiaro ancora si scopre lo sbaglio della seconda serie di somministrare l'accordo $C\,{}^{5}_{3}6$. Se in suo cambio ci esibisse l'accordo $A\,{}^{5}_{3}$, ci sarebbe coerenza fra il detto accordo e gli intervalli C G$^{\#}$, F G$^{\#}$, G$^{\#}$ B$^{\flat}$ contenuti nella terza serie.

Conchiudo; che se può talvolta sembrare, che le serie seconda, e terza ci diano qualche cosa di buono, è questo affatto non del metodo ma di una fortuita combinazione. Ha obbligo il vero metodo, che ogni cosa proceda perfettamente. Dopo tutto ciò sembrami impossibile, che un Soggetto così eccellente, e famoso, che un Giuseppe Tartini abbia potuto ancora dichiararsi favorevole al metodo da esso impiegato. Io gli feci il progetto, ch'egli mandasse queste mie difficoltà a quanti avesse voluto Fisico-Matematici, i quali per altro fossero bene informati della Musica teorica, e pratica; e quando un solo si fosse dichiarato favorevole al suo metodo, gli avrei dato senz'altro vinta la lite? ...

Promise il Sig. Tartini di vendicarsi, quando da me si fosse assegnata una figura diversa dal Circolo, da cui si deducesse lo

intero

intero musicale Sistema in genere, specie, ed individuo; La figura l'abbiamo pronta, e gliela posi sotto degli occhi, non perchè ad essa si appigliasse lasciato il Cerchio, ma perchè cavasse la conseguenza, che da principj così rimoti, e totalmente stranieri non dee dedursi il musicale Sistema.

La Parabola Apolloniana meriterebbe il titolo di armonica con più ragione del circolo. E voglia il vero, se all'asse ED (Fig. 4.), col vertice in E, e col parametro = 1 si descriverà la parabola ACEA, e segnata ED = 1, pel punto D si condurrà la normale AB, che taglierà la parabola nei punti A, B, ne risulterà AD = DE = DB = 1, AB = 2, e per la natura della curva sarà sempre l'ordinata HC media armonica fra i segmenti AH, HB della linea AB = 2, come agevolmente può dimostrarsi.

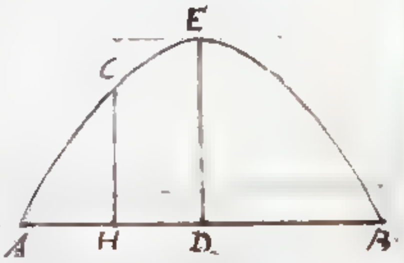


Fig. 4.

Descritta nuovamente la parabola (Fig. 5) AHG col parametro = 1, sia la porzione dell'asse HF = $\frac{1}{4}$, e delineata pel punto F la normale AFG, che tagli la parabola nei punti A, G, sarà AF = FG = $\frac{1}{2}$, e conseguentemente AG = 1. Se l'ascissa AB, e l'ordinata BM dinotino due suoni, colla figura delle loro vibrazioni (a) il residuo BG esprimerà il terzo suono, che si ode in aria secondo le osservazioni del nostro celebre Autore. Questa mia costruzione equivalente a quella del Sig. Tartini non serve per determinare il terzo suono, salvo che nella circostanza, che AB sia parte aliquota di AG.

Fig. 5

Essendo

Essendo AG = 1, AF = $\frac{1}{2}$, si seguono AE = $\frac{1}{3}$, AD = $\frac{1}{4}$, AC = $\frac{1}{5}$, AB = $\frac{1}{6}$, e condotta per i punti E, D, C, B le ordinate EI, DK, CL, BM, sarà EI = $\frac{2}{9}$, DK = $\frac{3}{16}$, CL = $\frac{4}{25}$, BM = $\frac{5}{36}$. Or ecco che la nostra parabola somministra assai più naturalmente del circolo la tre serie

AG = 1, AF = $\frac{1}{2}$, AE = $\frac{1}{3}$, AD = $\frac{1}{4}$, AC = $\frac{1}{5}$, AB = $\frac{1}{6}$.
FG = $\frac{1}{2}$, EG = $\frac{2}{3}$, DG = $\frac{3}{4}$, CG = $\frac{4}{5}$, BG = $\frac{5}{6}$.
FH = $\frac{1}{4}$, EI = $\frac{2}{9}$, DK = $\frac{3}{16}$, CL = $\frac{4}{25}$, BM = $\frac{5}{36}$.

dalle quali il Sig. Giuseppe ricava l'intero musicale Sistema....

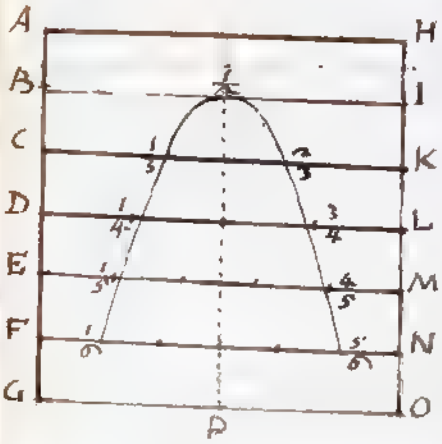


Fig. 6.

Restava ancora al nostro eccellentissimo Professore l'ultima riprova, ed è, che a me non sarebbe riuscito valendomi del quadrato, e dalla parabola di separare dalla seconda serie l'accompagnamento consonante per Terza minore. Vediamo un poco, se in questa impresa io ci riesco sì o no. Diviso in sei parti eguali (Fig. 6.) AB, BC, CD, &c. il lato AG = 1 del quadrato AO, e tirate le BI, CK, &c. parallele a GO, si partisca la linea AI in due porzioni eguali, la CK in tre, la DL in quattro, la EM in cinque, la FN in sei. Col vertice nel punto $\frac{1}{2}$, col parametro eguale ad $\frac{1}{6}$, ed all'asse $\frac{1}{2}$P parallelo ad AG si descrivano i due rami parabolici $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{3}$: $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{6}$. Passando il primo ramo per le divisioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, ed isfuggendo le due $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, separa dalla seconda serie i tre suoni $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, che insieme colla unità formano l'accompagnamento consonante per Terza minore

1, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Il secondo ramo passa

per

per le divisioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, schivando le due $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, ed aggiunge al nostro accompagnamento i suoni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, perchè esso acquisti la forma secondo il Sig. Tartini compita 1, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. Ho già di sopra fatta la riflessione, che esprimendo egli i suoni della 1a serie per i quadrati della corda, della suttesa, e della ordinata del circolo, lascia poi i quadrati; e si attiene alle linee, quando si tratta di trasceglierne della seconda serie li accompagnamento per terza minore. La parabola più costante del cerchio dinota sempre i suoni con linee.

Che poteva mai replicare il Sig. Giuseppe? Non era questa la circostanza, in cui mantenendo la parola data, dovea ripettersi? avendo egli assegnata una figura diversa del circolo, da cui si deduce l'intero musicale Sistema in genere, specie, ed individuo? Se la parabola dà tutto ciò, che somministra il circolo, ed anche qualche cosa di più, e con maggiore uniformità, ed eleganza; non dovea egli ripudiare il circolo, e adottar la parabola? Se fossi persuaso del suo metodo, e dei suoi principj, non tergiversarei un momento. Io, che batto un'altra strada, non posso dichiararmi per la parabola, se non a confronto del circolo; essendo mia ferma opinione, che e l'una, e l'altra siano basi troppo deboli, e mal atte a sostenere il musicale Sistema, come chiaramente apparisce dall'esame da me fatto delle

due

due serie seconda, e terza.

Ma quando anche il circolo, e la parabola col mezzo delle costruzioni del Sig. Tartini, e mie determinassero senza difetti l'intero musicale Sistema; nulladimeno non li assegnerei alla Musica per fondamento. Deve esser questa stabilita sopra oggetti, che cadano sotto il senso dell'udito, e tali sono i suoni gravi ed acuti; ed i loro paragoni. L'orecchio è stato organizzato dall'Autore della Natura con tal maestria, che alle proporzioni fra i tempi delle vibrazioni sonore, che ridotte a numeri fra loro primi non contengono numero impari maggiore del cinque, corrispondono nell'anima delle grate sensazioni, che si appellano consonanze. Si distinguono queste in tre classi, cioè in equisonanze, consonanze perfette, ed imperfette, secondochè le componenti ragioni ridotte a numeri fra loro primi contengono o il solo numero impari 1, o anche il 3, o anche il 5. Si possono paragonare non solamente i suoni simultanei, o armonici, ma ancora i consecutivi, o melodici, e questo secondo paragone è meno chiaro del primo. Oltre a ciò i principali confronti armonici si fanno col Basso, o suono più grave, le cui vibrazioni più durevoli contengono in se stesse quelle dei suoni acuti. Facendo uso di tali principj, si determinano e il Sistema di melodia da tre corde formato, e i due Sistemi di armonia, o sia gli accordi consonanti per

Terza

Terza maggiore, e per Terza minore, che applicati alle tre corde melodiche somministrano le Scale dei due Modi maggiore, e minore. Da queste traggono l'origine le Scale dei cinque Modi derivati, ognuno fornito di quel Sistema di Melodia, e di quegli accordi ad esso adattati, che sono determinati dalla Scala del Modo maggiore, o minore, da cui dipendono. Si fa poscia transito alla considerazione dei passaggi da un accompagnamento all'altro, e collo stesso incontro si stabiliscono le corde artificiali di ambedue i Modi, e gli accompagnamenti, ch'esse introducono in Musica. Succede la trattazione delle Dissonanze, che sono nuovi suoni aggiunti agli accordi consonanti, i quali suoni sono presi dalla Scala del Tuono, in cui la composizione si trova. Se ne contano di quattro specie, e si chiamano dissonanze; perchè ad uno, o più suoni dell'accompagnamento consonante si riferiscono in proporzioni, che ridotte a numeri fra loro primi, contengono qualche numero impari maggiore del cinque; e perciò riuscendo più o meno piccanti, si mitigano colla preparazione, e colla risoluzione. In sì fatta guisa progredendo, ed accoppiando l'esperienza col raziocinio, si stabiliscono ordinatamente le leggi del Contrappunto, qualmente mi sono ingegnato di effettuare nel Saggio da me pubblicato l'anno 1762.

Riflessioni
sopra il Libro primo della Scienza teorica,
e pratica della moderna Musica
del P. Francescantonio Vallotti
M.C. Maestro di Cappella nella
Basilica di S. Antonio di Padova.

Nel Tomo XXIII del nuovo Giornale de' Letterati
d'Italia. Modena pag. 45.

Riflessioni del Sig. Conte
Giordano Riccati sopra
il Libro primo della Scien=
za teorica, e pratica della
Moderna Musica del P.
Francescantonio Vallotti
Minor Conventuale Maestro
di Cappella nella Basilica
di S. Antonio di Padova.

Fra i Professori di Contrappunto, che in questo secolo hanno fiorito, si deve certamente uno de' posti più sublimi al P. Francescantonio Vallotti Maestro di Cappella nella Basilica di S. Antonio di Padova ultimamente defonto con universale rammarico. Suonando egli il terzo Organo, mentre reggeva la mentovata Cappella il P. Francesc=antonio Calegari, apprese l'intero maneggio delle musiche dissonanze riferite non solo al Basso fondamen=tale, ma ancora alle Parti di mezzo, e risoltate, e questa cognizione il con=dusse a comporre quelle bellissime Fughe, nelle quali si osservano esattamente le leggi del Contrappunto doppio all'Ottava. Sommamente armonici riusci=vano i suoi Ripieni, e generalmente il suo stile era ecclesiastico, pastoso, e vago, ed al vivo i sentimenti sacri esprimente. Gl'Introiti delle Messe, che contenevano il Canto fermo, erano riputati eccel=lenti, e con questo stile avea parimente composto le Funzioni della Settimana Santa a maraviglia patetiche, e così pungenti

pungenti. Lo studio del Canto Fermo gli avea insegnato, che adattando ad esso l'armonia, faceva d'uopo servirsi di modulazioni diverse da quelle, che nella Moderna Musica si costumano; e quindi chi non sa a fondo il Canto Fermo, alla mentovata specie di composizioni si astenga di accingersi.

L'eccellenza della pratica non potea andar disgiunta dalla fondata cognizione della teorica, intorno alla quale avea seriamente meditato, ed io, mentre scrivea il mio Trattato sopra le Leggi del Contrappunto, non ho mancato di consultarlo, e di chiedergli parecchi esempj, che egli mi favorì, come raccogliesi dal lungo carteggio con lui tenuto, che
custodisco con attenzione
gelosamente conservo. Sin dal 17[illegible] in circa cominciò a scrivere sopra la Scienza della Musica, ma proseguì più lentamente, e interrottamente il lavoro, talmente che solo nel mese di Ottobre 1779 uscì il primo Libro, intorno al quale versano le mie Reflessioni, e principalmente intorno a quei punti, nei quali discorda dal mio Saggio sopra le Leggi del Contrappunto pubblicato l'anno 1762., senza per altro mai nominarlo.

In questo primo Libro tratta l'insigne Autore solamente della Musica Scientifica, base, e fondamento della Pratica ben regolata. Nel II. che non molto dopo di questo avea in animo di dare alla luce, si dovea trattare degli Elementi

pratici

pratici della Musica; dei materiali però a più noti, alla sfuggita; dei più importanti, più diffusamente; e tali sono il temperamento, le scale, le cadenze, i Modi armoniali, e li Corali, cioè gli Ecclesiastici &c. Nel III. poi si dovevano dare le regole, e precetti del Contrappunto, ovvero sia del modo di ben comporre. E se dagli amatori della Musica fossero stati favorevolmente accolti li tre mentovati Libri, vi avrebbe aggiunto anche il IV. in cui divisava di dare un metodo ragionato di ben accompagnare con lo Strumento da tastatura. Quando mi regalò gentilmente il suo primo Libro, gli augurai lunga vita e salute, acciocchè potesse dar compimento ai rimanenti tre Libri, che dagli Intendenti della Musica erano avidamente aspettati. Ma egli era troppo avanzato negli anni, e non so a qual termine sieno ridotti i Libri, che rimangono inediti. Sarebbe desiderabile, che qualche Uomo dotto nella Musica Professione assumesse la lodevolissima impresa di pubblicarli.

Premette il P. M. Vallotti la *Definizione*, *o Spiegazione dei Termini*, ed alcune *Domande*, ed *Assiomi*. Vi fo sopra ~~questa~~ alquante avvertenze. Pag. XV. *Accordo consonante è quello, le cui parti integrali sono tutte consonanti; nè vale la giunta d'una, o più dissonanze a render dissonante un accordo*. Intendendo il Ch. Autore per accordo consonante la base, la Terza

maggiore

+Pag. XXVII. Domanda il ch. Autore *che li numeri diretti (in fatto di Ragioni, e Proporzioni) si intendano come frazioni della Serie armonica; cioè per es. 1. 2. 3. 4. come 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. e li retrogradi si prendano per numeri interi; cioè 4. 3. 2. 1. effettivamente quattro, tre, due uno.* Sembrami, che non ci fosse bisogno di questa Domanda. I numeri diretti 1. 2. 3. 4. esprimono i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari relativi alla durata 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. di esse vibrazioni. Al contrario i numeri retrogradi 4. 3. 2. 1. dinotano le durate delle vibrazioni relative ai numeri $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. 1. di esse vibrazioni, che in tempo eguale si fanno.

maggiore, o minore, la Quinta, e l'Ottava, non v'ha dubbio, che questo accordo resterà sempre consonante anche con la giunta di una o più dissonanze. Egli è l'aggregato dell'accordo consonante, e della dissonanza, che divien dissonante.

Chiama il P. M. Vallotti dissonanti quegli accordi, ch'io nomino consonanti per rappresentanza; perchè quantunque realmente dissonanti, rappresentano i consonanti, ed in figura di consonanti si adoprano. La Quinta minore per esempio non differendo dalla Quinta giusta, salvochè per un minor Semitono, la rappresenta in guisa, che si può usare come consonanza. Da me si appella accordo dissonante l'unione dell'accordo consonante con una o più dissonanze.

Pag. XXIV. *Dalla consonanza non si dà vero riversamento.* Io non comprendo il perchè dalla consonanza non si dia vero riversamento. La Quinta $\frac{2}{3}$ è un intervallo fondamentale. Trasportandola un'Ottava all'ingiù, discende sotto della base, e ne nasce la Quarta $\frac{4}{3}$, che è una Quinta riversata. Afferma il P. Vallotti, che l'11.a riversata diviene Quarta. Essendo la Quarta più acuta della base, l'11.a non è rovesciata. Richiede il riversamento, che l'11.a si trasporti due Ottave all'ingiù, onde divenga una Quinta più grave della base.

+Pag. XXVIII. *Il suono è al suono come*

la

la corda alla corda. Si deve avvertire, che le lunghezze delle corde della stessa materia e grossezza, ed egualmente tese si riferiscono nella ragione delle durate delle vibrazioni dei suoni. Generalmente, chiamata M la massa della corda, L la sua lunghezza, e P il peso, o la forza tendente, la durata di una vibrazione del suono sta come $\sqrt{\frac{ML}{P}}$. Nelle corde di costante grossezza, e tensione, e della medesima materia le masse seguitano la proporzione della lunghezza, la tensione è la stessa, e perciò le durate delle vibrazioni dei suoni sono come L. Comunemente il vocabolo suono significa il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato. Quindi si dice, che un suono cresce, quando diventa più acuto; perchè in tal circostanza si aumenta il numero delle vibrazioni, fatte in tempo dato; ed al contrario, che un suono cala, qualora diviene più grave; a cagione che si minora il numero delle vibrazioni, che in tempo dato si fanno.

In qualunque corda sono contenute tutte le minori di essa, e per conseguenza in qualunque suono trovansi contenuti li suoi più acuti. È vero, che in una corda sono contenute le minori di essa, ma se queste non sono parti aliquote della corda, non possono con essa vibrarsi; e quindi non può ammettersi, che in qualunque suono trovansi contenuti li suoi più acuti. Col suono della corda 1. non sono congiunti salvochè i suoni delle corde $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ Deve osservarsi

con

con verità; che una corda può rendere i suoni di tutte le sue parti; egli è d'uopo supporre ciascuna parte divisa dal restante della corda col mezzo di uno scannello.

Tutti li numeri dispari sono numeri primi nella Musica. Questa proposizione è vera; perchè facendosi i principali paragoni colla base 1.; in riguardo ad essa tutti i numeri dispari sono primi. In fatti il rapporto 1:7, o sia 4:7 dinotante la Settima è più semplice del rapporto 1:9, o sia 4:9 dinotante la Nona, benchè il numero 9 sia composto.

Ai preamboli succede il Libro I. diviso in XLVIII Capitoli, ~~la maggior~~ parte dei quali sono suddivisi in Articoli. Io mi fermerò a quei passi dei predetti Capitoli, e Articoli, sui quali giudicherò opportuno di fare delle avvertenze importanti.

^ Delle diverse maniere onde li varj rapporti de' suoni conoscer si possono.

Cap. II ^ Art. I. pag. 4. Le vibrazioni poi sono di natura, e d'indole aritmetica relativamente all'Armonia, ed esattamente ne formano fra di loro la serie 1.2.3.4.5. &c. I numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari sono sempre in ragione inversa delle durate di esse vibrazioni. Perciò se le durate staranno in progressione armonica 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. i predetti numeri di vibrazioni formeranno una serie aritmetica 1.2.3.4.5.6; ch'è inversa dell'armonica soprascritta. Che se le durate procedes-

sero

sero in serie aritmetica 6. 5. 4. 3., i numeri delle vibrazioni si riferirebbero nella inversa progressione armonica $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$, che in numeri interi si riduce alla seguente 10. 12. 15. 20. Accettando la durata la serie geometrica 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. ecc., i numeri delle vibrazioni si corrisponderanno nella serie geometrica inversa 1. 2. 4. 8 ecc.

Cap. II. Art. I. pag. 5. Infatti se potessero numerarsi le vibrazioni avremmo anche il un suono fisso, per cui in darno si sono adoprati (fra gli altri molti) con ispecialità, e con impegno Mr Sauveur, e Mr Diderot. Il suono fisso è quello, che, in per esempio in un minuto secondo un dato numero di vibrazioni. Il numero di vibrazioni, che fa una corda in un minuto secondo, vien espresso dalla formola $\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{Ph}{LM}}$, in cui b significa il quadrante circolare relativo al raggio c., h la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo, L la lunghezza della corda, M la sua massa, e P il peso, o forza tendente. È dunque in mio arbitrio il determinare siffattamente le quantità L, M, P, che la corda faccia in un minuto secondo quel numero di vibrazioni, che io avessi scelto per suono fisso.

Cap. II. Art. IV. pag. 7. Che se ad un sol punto fissata sia la corda, e libera nell'altro a guisa di pendulo; in tal caso la proporzione della lunghezza deve essere come li quadrati della Serie Armonica, cioè $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{25}$. ecc., e li suoni della corda

sono

sono fra di loro come quelli prodotti nel Canone dalle lunghezze corrispondenti alli cinque primi termini della Serie Armonica, cioè alla radice. Le vibrazioni dei pendoli non hanno punto che fare colle vibrazioni musiche delle corde sonore. Un pendolo di lunghezza determinata fa le sue vibrazioni di equal durazione, qualunque peso ad esso si appenda; il qual peso variato altera le vibrazioni delle corde sonore.

Osservazioni sopra la corda sonora.

Cap. III., pag. 9. Toccata dunque la corda sonora, ci fa essa tosto sentire apertamente il suono suo proprio; ed in oltre colla risonanza si spiega in tanti altri suoni, quante sono le sue parti aliquote, cioè $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. ecc. in serie armonica continua. Fra tanti però solamente li suoni di $\frac{1}{3}$, e di $\frac{1}{5}$ si rendono sensibili, e non si rilevano $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{6}$, perchè equisonanti di 1. ed $\frac{1}{3}$. Molto meno si rileva quello di $\frac{1}{7}$, che che ne dica Mr. Rameau (a), per esser troppo acuto, e debole nel nostro orecchio. Nella mia Opera Delle Corde, ovvero Fibre elastiche, Sched. IV. pag. 79. 80. ho insegnato l'artificio per rendere sensibili i suoni delle parti aliquote $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{9}$. ecc., che sono incorporati col suono della corda intera 1.

Quanto poi alli aggiunta, che propone Mr. Rameau di due corpi maggiori del corpo dato, cioè a dire di due corde più lunghe, che alla data segnata 1 siano

come

(a) Gener. arm. cap. 1. sperienza 3. ecc.

come 3 e 5; le quali fremono, com'ei dice, al suono della corda 1.; e sono li suoni in proporzione aritmetica. Dico, che se tali suoni, per mala sorte, si udissero insieme con quelli della risonanza $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$., si manifesterebbe un orribile caos: atteso che si udirebbero precisamente i suoni (dato Ut, o sia C = 1, come accenna Rameau) sarebbero dissi i suoni dal grave all'acuto come 5. 3. 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. ed è questa, per di

A♭ F C G E

lui sentenza, l'origine del modo minore. Ma buon Dio! qual corrispondenza mai del modo minore F. A♭. C. al maggiore C. E. G? Pretende non rettamente Mr. Rameau, che la corda 1. faccia sonare intere le corde 3. 5., e da ciò deduce l'accompagnamento per terza minore. La corda 1. non fa sonare intere le corde 3. 5. ma bensì divise in parti 3. e 5. Veggasi la citata Opera alla pag. 61. 62. Svanisce adunque la deduzione dello accordo per terza minore ideata dal detto Scrittore.

Costruzione del Monocordo, e vari modi di farne uso.

Cap. IV. Art. I. pag. 13. L'invenzione del Monocordo per comune opinione si attribuisce a Pitagora, per esser egli stato il primo che prendesse a considerare la forma delle consonanze con molti sperimenti, dopo l'osservazione ed esame fatto del vario peso dei martelli nell'officina fabrile, dove egli credette di essere stato condotto non già dal caso, ma bensì per un atto di speziale divina providenza. I corpi simili rendono suoni,

la

le durate delle cui vibrazioni sono propor=
zionali ai lati omologhi; e perciò i suoni
stanno inversamente come le radici cu=
biche dei pesi dei corpi. Se i martelli
dell'officina fabrile erano simili, avreb-
bero prodotto l'Ottava, non quando uno
pesava il doppio dell'altro, ma bensì
quando il maggiore avesse pesato otto
volte quanto il minore.

Cap. IV. Art. IV. pag. 16. Ed è pur vero e
certissimo, che la perfetta armonia nasce
dalla giusta, e natural disposizione di
tutti i suoni consonanti, ascendendo
coll'ordine di loro origine, ed insieme
poi raccolti. Un accompagnamento
consonante dee escludere qualunque
ragione, che contenga un numero impa=
ri maggiore del cinque: e se è funda=
mentale, dee riferire al Basso il mi=
glior aggregato di consonanza. Veggasi
il mio Saggio sopra le Leggi del Contrap=
punto pag. 3. 4.

Dilucidazione della Serie armonica.
Cap. V., pag. 16. Per altro la serie armonica
si è quella, che propriamente appartiene
alla Musica. Io ammetto questa proposi=
zione; perchè credo che Tevacchio fon=
di il suo giudizio, mettendo al paragone
le proporzioni fra le durate delle vibra=
zioni. L'ottima progressione consonante
di esse durate vien espressa dalla serie
armonica $1. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}.$

Cap. V. Art. I. pag. 16. Premetto 1. che le
due serie aritmetica, ed armonica sono
di contraria natura: quella crescente,
e questa decrescente, ambedue all'infinito.

Queste

rispettivamente alla Musica
Questa è vera, quando la serie aritmetica dinota il numero delle vibrazioni fatte nello stesso tempo, e l'armonica la loro durata. Che se la prima serie esprime la durata delle vibrazioni, e la seconda il loro numero in pari tempo, succede tutto il contrario, decrescendo quella, e crescendo questa.

Cap. VI, pag. 21. ~~Alle armonie convengono le Ragioni e le Proporzioni soltanto di maggiore inegualità~~. Le ragioni di minor inegualità si debbono accettare nelle armonie, quando per essa si dinota la relazione tra i numeri delle vibrazioni fatte nello stesso tempo; ed è in tal ipotesi 1. 2. 3. 4. 5. 6. significa l'ottimo consonante accompagnamento.

Che alle Armonie convengono le Ragioni e le Proporzioni soltanto di maggiore inegualità.

Cap. VII, Art. III. pag. 24. Essendosi nell'antecedente Cap. stabilito, che colle frazioni della serie armonica devesi indicare, e segnare qualunque Ragione, o Proporzione, ovvero parecchie, che siccome esse frazioni portano costantemente lo stesso numeratore (l'unità) così li soli denominatori si troveranno per lo più, in via di compendio, nel corso di quest'opera segnati. Quindi per es. 3. 4. 5. sarà lo stesso che $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. Si sarebbe meglio spiegato il P. M. Vallotti dicendo, che 3. 4. 5 e $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. dinotano lo stesso accordo espresso in doppia guisa, o per numeri delle vibrazioni in pari tempo, o per la loro durata.

Qual differenza siavi tra Proporzione, e Ragione, e Relazione.

Della Proporzione Armonica
Cap. IX, Art. I. pag. 29. Infatti dati tre numeri in proporzione Armonica, la somma degli estremi moltiplicata pel mezzo trovasi

costantemente

Cap. IX. Art. III. pag. 32. La proporzione armonica formasi non solo collocando un mezzo fra gli estremi dati; ma pur anco aggiungendo alli due termini il terzo armonico. ecc.

Proposti due termini della serie armonica, per es. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$, ne viene tosto per terzo $\frac{1}{6}$; e qualunque siano li termini dati, purchè si serbi la stessa distanza fra li denominatori, sarà ugualmente facile trovare il terzo armonico. Si proponga di trovare ai numeri 7. 5. il terzo armonico. Stando essi come $\frac{1}{5} : \frac{1}{7}$, per la regola del P. Vallotti saranno $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$ in serie armonica. Facciasi $\frac{1}{5} : \frac{1}{9} :: 7 : \frac{35}{9}$, e si concluda essere 7. 5. $\frac{35}{9}$, in armonica progressione.

ovvero $\frac{35}{5}$. $\frac{35}{7}$. $\frac{35}{9}$.

costantemente in ragion dupla del prodotto degli estremi. Siano le tre quantità a, b, c in serie armonica, egli è noto essere $\frac{2ac}{a+c} = b$: dunque $2ac = (a+c).b$, e per conseguenza $1 : 2 :: ac : (a+c).b$, che è quanto a dire il prodotto della somma degli estremi nel termine medio doppio del prodotto degli estremi. La media armonica si agguaglia al prodotto ac degli estremi, diviso per la media aritmetica $\frac{a+c}{2}$ fra essi estremi.

* Della Proporzione Aritmetica.

Cap. X. Art. II. pag. 34: Dati adunque quanti termini si vogliano in proporzione Aritmetica dico, che l'analogia sta nel numero degli estremi e dei mezzi, colla rispettiva loro somma. Quindi ne risulta in chiari termini il canone: Come il numero degli estremi al numero dei mezzi, così è la somma degli estremi alla somma dei mezzi. Chiamati a, b il primo, e l'ultimo termine di una serie aritmetica, n il numero dei termini, ed s la somma della serie, egli è noto essere $(a+b).\frac{n}{2} = s$, e perciò $1 : \frac{n}{2} :: a+b : s$, ovvero $2 : n :: a+b : s$, e finalmente $2 : n-2 :: a+b : s-a-b$, come prescrive il canone del nostro Autore. ...

Cap. X. Art. IV. pag. 35. In questo Articolo il P. Vallotti, dati due numeri, cava il terzo in ragione aritmetica. Se a $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ si dovea ritrovare il terzo aritmetico, si determini a 3. 4. il terzo armonico 6., ed $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{6}$ saranno in ragione aritmetica. Si ottiene anche ciò facilmente riducendo $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, onde divengano $\frac{4}{12}$. $\frac{3}{12}$, che esattamente

apertamente dimostrano il terzo aritmetico $= \frac{a}{12} = \frac{1}{61}$ ...

= Cap. XI, pag. 37. 38. Quattro numeri a, b, c, d sono armonicamente proporzionali, quando $\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, e conseguentemente $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$. Fatti i dovuti calcoli si troverà $d = \frac{abc}{a.(b+c) - bc}$, ciò è il quarto armonico eguale al prodotto dei tre primi termini diviso pel prodotto del primo termine nella somma dei due

^ La proporzione aritmetica, in qualunque aggregato di numeri interi, si converte in armonica, qualora come divisori dell'Unità gli stessi numeri siano considerati.

ciò è il quarto armonico eguale al prodotto dei termini primo, secondo, e terzo diviso pel prodotto del primo termine nella somma del secondo e del terzo, meno il prodotto del secondo nel terzo.

~~[illegible]~~

l'eccesso, con cui un termine supera l'altro, stabilisce: Come la ragione degli estremi moltiplicata nella distanza del 1.° al 2.° termine, alla distanza del 2.° all'ultimo; così la differenza del 1.° al 2.° termine a quella del 2.° all'ultimo. Nell'esempio la ragione degli estremi è = 5, la distanza del 1.° al 2.° termine = 3, la distanza del 2.° all'ultimo = 5; la

differenza

Cap. IX. Art. III. pag. 32. La proporzione armonica formasi non solo collocando un mezzo fra gli estremi dati; ma pur anco aggiungendo alli due termini il terzo armonico. ecc.

Proposti due termini della serie armonica, s

vi.

$\frac{1}{6}$

no

che

di

m

m

il

Si

ai

te

ass

la

sa

serie armonica. Facciasi $\frac{1}{5} : \frac{1}{9} :: 7 : \frac{35}{9}$, e si conchiuda essere $7 \cdot 5 \cdot \frac{35}{9}$ in armonica progressione. ovvero $\frac{35}{5} \cdot \frac{35}{7} \cdot \frac{35}{9}$.

costantemente in ragion dupla del prodotto degli estremi. Siano le tre quantità a, b, c in serie armonica, egli è noto essere $\frac{2ac}{a+c} = b$, dunque $2ac = (a+c) \cdot b$, e per conseguenza $1 : 2 :: ac : (a+c) \cdot b$, cioè quanto a dire il prodotto della somma degli estremi nel termine medio doppio del prodotto degli estremi. La media armonica si eguaglia al prodotto ac degli estremi, diviso per la media aritmetica $\frac{a+c}{2}$ fra essi estremi.

tore.

Cap. X. Art. IV. pag. 35. In questo Articolo il P. Vallotti, dati due numeri, cava il terzo in ragione aritmetica. Se a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ io devo ritrovare il terzo aritmetico, si determini a $3 \cdot 4$ il terzo armonico 6, ed $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ saranno in ragione aritmetica. Si ottiene anche ciò facilmente riducendo $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, onde diventano $\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12}$, che esattamente

apertamente dimostrano il terzo aritmetico $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

= Cap. XI. pag. 37. 38. Quattro numeri[^] a, b, c, d sono armonicamente proporzionali, quando $\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, e conseguentemente $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$. Fatti i dovuti calcoli si troverà $d = \frac{abc}{a.(b+c)-bc}$, cioè il quarto armonico eguale al prodotto dei tre primi termini diviso pel prodotto del primo termine nella somma dei due secondi meno il prodotto dei due secondi; Siano dati i tre primi numeri 24. 16. 12., e si troverà $\frac{abc}{a.(b+c)-bc} = \frac{4608}{672-192} = \frac{4608}{480} = 9 + \frac{3}{5} = d$, e non $d = 9$, come pretende il Chambers. Se coll'Ozanam i tre primi termini siano 2. 3. 6., scopriremo $d = \frac{36}{18-18} = \frac{36}{0} = \infty$; e quindi il mentovato Autore malamente determina $d = 12$.

[^] La proporzione aritmetica, in qualunque aggregato di numeri interi, si converte in armonica, qualora come Divisori dell'Unità gli stessi numeri siano considerati.

= Cap. XI. Art. 11. pag. 41. La regola data dal P. M. Vallotti per la proporzione armonica discreta suppone, che questa sia espressa da frazioni, che abbiano il numeratore costante per esempio $\frac{2}{2}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{2}{7}$. $\frac{2}{10}$, e chiamando distanza la differenza fra i denominatori, e differenza l'eccesso, con cui un termine supera l'altro, stabilisce: Come la ragione degli estremi moltiplicata nella distanza dal 1.° al 2.° termine, alla distanza dal 2.° all'ultimo; così la differenza dal 1.° al 2.° termine a quella dal 2.° all'ultimo. Nell'esempio la ragione degli estremi è = 5, la distanza dal 1.° al 2.° termine = 3, la distanza dal 2.° all'ultimo = 5, la

differenza

differenza del primo al 2.° $= \frac{3}{5}$, e quella del 2.° all'ultimo $= \frac{1}{5}$. Avremo dunque $5\times3 : 5 :: \frac{3}{5} : \frac{1}{5}$; il che si accorda col vero. Per il mio canone scopriremo

$$\frac{\frac{2}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}}{\frac{2}{2}\times\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)-\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}} = \frac{8}{70\times\left(\frac{24}{35}-\frac{4}{35}\right)} = \frac{1}{5},$$

che è il quarto termine della proporzione armonica. Il mio canone regge in qualunque modo sia espressa la proporzione armonica, esempigrazia 35. 14. 10. 7. : non così quello del P. Vallotti, il quale richiede, che essa si riduca alla seguente $\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{10}$.

Se dati i termini 1.° 2.° 4.°, si volesse trovare il 3.°, si avrebbe $\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, e ridotto il computo $\frac{abd}{b\cdot(a+d)-ad} = c$, cioè il 3.° termine uguale al prodotto dei tre rimanenti, diviso pel prodotto del 2.° nella somma del 1.° e del 4.°, meno il prodotto del 1.° nel 4.°

<u>Della Proporzione Contro-geometrica</u>.

Cap. XIV, pag. 48. Chiama il nostro Autore proporzione contro-geometrica quella, in cui il 1.° al 3.° termine sta in ragione suddupplicata della differenza fra il 1.° e il 2.° termine, fra il 2.° e il 3.°, per esempio 10. 6. 5. Siccome nella ragione armonica il 1.° al 3.° termine si riferisca come la differenza fra il 1.° e il 2.° a quella fra il 2.° e il 3.°; e nella ragione contro-armonica, di cui il P. Vallotti ha trattato nel Cap. XII, i termini 1.° e 3.° accettano la proporzione delle differenze fra il 2.° ed il 3.°, fra il 1.° e il 2.°; così nella ragione geometrica essendo il 1.° al 3.° termine come i quadrati delle differenze fra il 1.° e il 2.°, fra il 2.° e il 3.°; la ragione contro-geometrica

geometrica dovrebbe essere quella, nella quale il 1.° al 3.° termine sta come i quadrati delle differenze fra i termini 1.° e 2.°, 2.° e 3.°; esempigrazia 4. 3. 1.; 9. 7. 1.; 16. 13. 1.; 16. 13. 9. Noto che siccome nella serie 6. 5. 3. 2. è il 5. medio contrarmonico fra 6. e 3., fra 6. e 2.; così nelle progressioni 9. 7. 4. 1., 16. 13. 9. 1 il 7. è del pari medio contro-geometrico fra 9. e 4., fra 9. e 1., ed il 13. fra il 16. e il 9., fra il 16. ed 1.

Nominandosi a, b, c. tre termini in ragione contro-geometrica alla mia maniera, si troverà il medio contro-geometrico $b = \frac{a^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}}$.

Cap. XVII. (Dal Principio, ovvero dalla cagione immediata delle Consonanze.) pag. 59. Quetanto il P. Vallotti, che per rinvenire delle consonanze, e delle dissonanze la vera fisica cagione, deve conchiudersi (salva la dovuta venerazione al gran Galilei) che alla lunghezza delle corde come al primo fonte, convien rivolgersi. Convien rivolgersi alla durata delle vibrazioni dei corpi sonori di qualunque specie essi siano, e non considerare la sola corde, e di più unicamente quelle della stessa materia, grossezza, e tensione.

Pag. 60. 61. Ultimamente poi è uscito alla luce il Trattato della Musica del celebre S.r Tartini, in cui stabilisce il Principio dell'armonia nel circolo dimostrato intrinsecamente armonico ecc. Oltre di che le proprietà del Circolo analoghe all'armonia sono comuni alla Parabola, e ad altre geometriche figure ... de... dire, che il P. Vallotti abbia letta la mia Lettera al

S.r Tartini

S.r Tartini scritte l'anno 1760, nelle quali deduce dalla parabola la stessa cosa che egli deduceva dal circolo.

Pag. 61. 62. Impugna poscia l'idea di M.r Rameau, che riconosce il principio dell'armonia nell'effetto naturale, che risulta dalla risonanza di ciascheduno corpo sonoro in particolare. Veggasi l'esame da me pubblicato nel Tomo XXI. di questo Giornale del Sistema del mentovato signor Scrittore Francese.

Quale sia la vera origine, e cagione delle consonanze.

Cap. XVIII. Art. III. pag. 67. Dico dunque, che dalli soli residui della corda sonora vengono determinati e fissati li numeri consonanti 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. e non oltre. Quindi dà il nostro Autore, che $\frac{1}{3}$ sia consonante, perchè il residuo $\frac{2}{3}$ è equisono ad $\frac{1}{3}$; che $\frac{1}{5}$ sia consonante, perchè il residuo $\frac{4}{5}$ è equisono ad $\frac{1}{5}$; e che $\frac{1}{7}$ sia dissonante, perchè il residuo $\frac{6}{7}$ non forma equisonanza con $\frac{1}{7}$. Ora ciò posto $\frac{1}{4}$ non dovrebbe essere consonante, perchè il residuo $\frac{3}{4}$ non è equisono ad $\frac{1}{4}$; e lo stesso si dovrebbe asserire di $\frac{1}{6}$, di $\frac{1}{8}$, perchè $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ non sono equisoni ad $\frac{1}{6}$, ad $\frac{1}{8}$. Inoltre $\frac{1}{9}$ avrebbe ad essere consonante, a cagione che il residuo $\frac{8}{9}$ corrisponde in equisonanza ad $\frac{1}{9}$.

Si aggiunga, che i prodotti residui sono ignoti alle orecchie, perchè non sonano, e quando anche sonassero, non potrebbero per opera della corda in $\frac{1}{2}$, in $\frac{1}{3}$, in $\frac{1}{4}$, in $\frac{1}{5}$, in $\frac{1}{6}$, in $\frac{1}{7}$. ecc. vibrarsi, salvochè divisi in parti unisone ad essa corda; laonde si avrebbe sempre l'equisonanza.

Resta

Resta adunque inconchiudente il canone stabilito dal P. M. Vallotti. Io desumo dalla esperienza, che i numeri impari 1. 3. 5. sieno i soli consonanti, e confesso di ignorare la dimostrazione di questo limite.

Cap. XVIII. Art. VI. pag. 51. Nondimeno poiché questi, ed altri simili riflessi che potrei addurre, saranno forse considerati come ragioni di pura convenienza e non più; ne soggiungo perciò uno affatto decisivo. Questo è il riflesso, che 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. sono geometrici; e poiché si è d'altronde stabilito e provato, che dalla proporzione armonica nascono le consonanze; così dico che dalla proporzione geometrica nascono le dissonanze. Le consonanze nascono dal non ammettere numero impari maggiore del cinque, e non mica dalla proporzione armonica, la quale diventa dissonante, quando oltrepassa il limite del numero impari cinque. Anche la proporzione geometrica è consonante, qualora non riceve numero impari maggiore del cinque, e tal è la serie 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ ecc. Le altre serie geometriche saranno dissonanti, perché danno luogo a numeri impari maggiori del cinque, come per esempio.

1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$. ecc.
1. $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{27}{64}$. ecc.
1. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{25}$. $\frac{1}{125}$. ecc.
1. $\frac{4}{5}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{64}{125}$. ecc.
1. $\frac{5}{6}$. $\frac{25}{36}$. $\frac{125}{216}$. ecc. +

+ Aggiungo che se dal nostro Autore si esclude $\frac{1}{9}$ dal numero delle consonanze, perché è geometrica la serie 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$., dovrà accettarsi $\frac{1}{17}$ equisono al residuo $\frac{16}{17}$, a cagione che in riguardo ad esso, ch'è numero primo, non può aver luogo la geometrica proporzione. Sarebbe adunque consonante la 9ª minore $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{17}$ secondo il canone del P. Vallotti: conseguenza sommamente ripugnante.

Cap. XIX. pag. 53. Nasce l'Unisono da due corde per ogni conto fra di loro uguali; ✓ Dell'Unisono.

e

e generalmente dall'eguale durata delle vibrazioni di due corpi sonori.

Della Ottava.
Cap. XX, pag. 75: Dopo l'Unisono segue tosto l'Ottava, che nasce dalla proporzione dupla, perché divisa la corda sonora in due parti si scorge l'Ottava fra 1 e $\frac{1}{2}$, cioè fra l'intera corda e la sua metà. Più generalmente due corpi sonori forman l'Ottava, quando i tempi delle vibrazioni stanno come $1 : \frac{1}{2}$, o sia come $2 : 1$.

Della Quinta.
Cap. XXI, pag. 77: Dalla sesquialtera 3 e 2 nasce la quinta, che scorgesi essere la seconda delle consonanze fra grave e acuto nell'ordine della loro generazione. Infatti divisa la corda sonora in tre parti rilevasi la detta consonanza nell'ordine armonico fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ = 3 e 2. Due corpi sonori si corrispondono in Quinta, qualora le durate delle loro vibrazioni sono come $3 : 2$.

Non conviene pertanto alla 5.a minore l'odioso nome di 5.a falsa, e molto meno quello di 5.a diminuita; mentre che gli intervalli diminuiti, e gli eccedenti non hanno luogo nel sistema puro diatonico. Il chiamare la 5.a, di cui si parla, minore, o diminuita, si riduce ad una quistione di nome. Tuttavia approvo, che si distinguano gli intervalli diatonici dai cromatici, chiamando quelli minori o maggiori, e questi diminuiti o eccedenti.

Della Quarta
Cap. XXII, pag. 74: Dalla sesquiterza

4 a 3 nasce la Quarta ecc.

Ella è consonanza secondaria, essendo il complemento della quinta all'ottava. Si considera come complemento della 5.a, quando è posta al di sopra della 5.a: ma quando si riferisce al Basso, è una 5.a rivoltata nascente dal trasportare all'8.a bassa il suono acuto della 5.a.

Della Terza maggiore.
Cap. XXIII. pag. 40. Dalla sesquiquarta 5 a 4 nasce la Terza maggiore ecc.

Non è poi altrimenti consonanza imperfetta la 3.a maggiore. Si danno tre classi di consonanza, secondochè ammettono o il solo numero impari 1., o il 3., o il 5. La prima la chiamo equisonanza, la seconda consonanza perfetta, la terza consonanza imperfetta, cioè meno perfetta. Questa giustissima dottrina l'ho spiegata nel mio Saggio, nè so come il P. M. Vallotti l'abbia trascurata.

Della Terza minore.
Cap. XXIV. pag. 41. Segue in ordine la Sesquiquinta 6 a 5, da cui nasce la Terza minore ecc.

La terza minore è consonanza secondaria, e compimento della 6.a maggiore all'8.a, come vedremo nel seguente Capitolo. Io distinguo tre specie di intervalli, fondamentali, rivoltati, nè fondamentali nè rivoltati. I primi hanno per Basso un numero della serie 1. 2. 4. 8. ecc. (espressi i suoni pei numeri delle vibrazioni fatte in tempi eguali) come per esempio 1: 3, 2: 3, 1: 5, 4: 5. Nei secondi il numero della predetta serie è trasportato

rovesato nella parte acuta, come 3 : 4, 5 : 8, 9 : 16. Nei terzi poi sono esclusi i numeri della mentovata serie, come 3 : 5; 5 : 6, 8 : 9, 9 : 10, e questi non sono nè fondamentali nè rivoltati. Per tale ragione la Terza minore 5 : 6 può aver luogo nell'accordo fondamentale di Terza minore, Quinta, e Ottava; perchè se non è fondamentale, non è nè può rivoltata.

Della Sesta Maggiore.
Cap. XXV., pag. 42. Dalla super-bipartiente-terza 5 a 3 nasce la 6.ª maggiore ecc.

La 6.ª maggiore è consonanza primaria, ma non è diretta; poichè non ha luogo nella base e 1.ª armonica. La 6.ª maggiore non può essere consonanza primaria, perchè formata da una Quarta intervallo rivoltato, e da una Terza maggiore. In Musica si usa meno frequentemente l'accordo 3. 4. 5. di Quarta e Sesta maggiore, dell'altro 5. 6. 8 di Terza minore e Sesta minore; perchè nel primo al Basso si riferisce un rivolto di consonanza perfetta, e nel secondo un rivolto di consonanza imperfetta, che dall'orecchio è meno chiaramente distinto.

Della Sesta Minore.
Cap. XXVI., pag. 44. Nasce la 6.ª minore dalla ragione super-tripartiente-quinta, cioè 8 a 5 ecc. Essa è consonanza secondaria, e compimento della 3.ª maggiore all'8.ª Si dee chiamar compimento, quando è situata fra la 3.ª maggiore e l'8.ª: ma quando si riferisce al Basso, è un rivolto della 3.ª maggiore 4 : 5, nascente dal trasportare il suono fondamentale 4 all'8.ª alta 8.

Cap. XXVII.

Della Quinta Minore.

Cap. XXVII. Art. I. pag. 85. Fra questi (intervalli) ci si presenta in primo luogo la 5.a minore diatonica, la cui ragione è di 45 a 64, come B♮ a F. La ragione della 5.a minore diatonica è veramente 45 : 64 : ma essendo l'orecchio mal atto a giudicar di un rapporto, in cui c'entra il numero impari 45, riferisce la 5.a minore, quando si usa come consonanza, alla ragione 7 : 10, che s'adegua colla sovrasettima, non superandola salvochè per $\frac{225}{224}$ terza parte un po' crescente del Comma $\frac{81}{80}$. Si pratica non di rado in Musica l'accordo 7. 8. 10. di Terza diminuita e Quinta minore per esempio D♯ F A fondato sulla quarta corda artificiale D♯ del Tuono A per Terza minore. Di un tale accordo parla il nostro Autore nell'Art. III.

Cap. XXVII. Art. IV. pag. 87. Finalmente per esaurire ciò che spetta al presente Capitolo, soggiungo che (all'opposto della mentovata 5.a) un'altra pura ve n'è, composta di 3.a maggiore nel grave, ed una diminuita nell'acuto, come a dire E G♯ B♭.

Non può aver luogo una tal 5.a, se non nella 5.a corda del modo minore, preceduta però dalla 1.a corda diminuita dal ♭ molle. Ma poi come possa cotesta corda segnata col ♭ molle introdursi nel modo naturale, è questione non agevole da risolversi; imperciocchè lungo e fino ragionamento richiede: quindi riserbato al Secondo Libro, dove si parlerà dell'origine del modo minore. Nella maniera, in cui usa la detta 5.a

il

il D. M. Vallotti $D3^{6\flat}$ $C3\#^{5\flat}$, io l'ammetterei mai volontieri nel Contrappunto; perché la seconda corda artificiale B^{6}, qualmente ho insegnato nel mio Saggio, si introduca nel Tuono minore A, per rendere consonante l'accordo $D3^{6\flat}$, e non per guastare il susseguente accordo $C3\#^{5}$. Mi stupisco bene ch'egli asserisca, che il nostro accompagnamento di Terza maggiore e Quinta minore non possa aver luogo salvo che nella 5.ª corda del Modo minore, mentre nelle sue composizioni io l'ho veduto adattato alla 2.ª corda del detto Modo nella guisa seguente $A3^{6\flat}$ $B3\#^{5\flat}$ $C3\#^{5}$. Nell'accordo $B3\#^{5\flat}$ s'introduce la quarta corda artificiale D# affine di rendere più concludente la Cadenza della seconda alla quinta corda, e far sì, che come nella Cadenza perfetta si ascende per un Semituono dalla Terza dell'accompagnamento antecedente alla base del conseguente. Veggasi il mio Saggio alla pag. 30.

Della Quinta Accedente Cap. XXVIII, pag. 46. Siccome è certo che la quinta minore diatonica ha luogo ugualmente nei due modi maggiore, e minore; così non v'è dubbio che la 5.ª accedente nel modo minore solamente ha luogo del pari che ogni altro intervallo accedente o diminuito: essendo quasi, niuno eccettuato, intervalli cromatici. ec.

Nella 3.ª corda però del modo minore precisamente, e non in altra, può aver luogo cotesto intervallo; e dalla sola alterazione della 7.ª corda G# prende la

sua

sua origine. Infatti 16. 20. 25. è quello
C. E. G#
accordo di Terza maggiore e Quinta eccedente, che adopra in qualità di consonante il Tuono minore A: Alla giustissima dottrina del nostro Autore aggiungo soltanto, che alla ragione 16:25 si accosta moltissimo quest'altra più semplice 9:14, a cui per conseguenza la riferisce l'orecchio. La prima ragione supera la seconda per $\frac{225}{224}$ terza parte alquanto crescente del Comma.

Pag. 49. Confessa che il Triemituono o Seconda eccedente F G# espressa dalla ragione 64:75 si adegua al rapporto $\frac{1}{7}:\frac{1}{6}$, ossia 6:7, consistendo la differenza in $\frac{225}{224}$; il che replica alla pag. 113. Ora componendosi la Quarta maggiore D G# da colla Terza minore D F, e colla Seconda eccedente F G#, dovrà parimente concedere, che la Quarta maggiore accetti la ragione 5:7; onde si abbia 5. 6. 7.
D F G#

Della Sesta eccedente
Cap. XXIX. pag. 90. Delle 5.e minori una è quella (Cap. XXVII. Art. III.) che forma l'accordo D#. F♮. A. Ora si vuol riflettere ai Giovani Compositori, che dato un tal accordo, ne viene per ordine nella 2.a armonia quello di F. A. D#, i cui estremi sono appunto nello intervallo di 6.a eccedente, essendo F.A una Terza maggiore 4:5, ed A.D# una Quarta maggiore 5:7, come poco fa ho provato; il predetto accordo si esprimerà nella seguente maniera
4. 5. 7, e quindi la Sesta eccedente
F A D#

si appropriarà

si appropriarà la ragione 4 : 7.

^ Dal Principio, e cagione della Dissonanza.

Cap. XXXI, pag. 92. Poichè si restringono in origine li suoni consonanti in quelli tre solamente, che corrispondono ad $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. della corda sonora, gl'impari che seguono cioè $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{15}$. ecc. rendono suoni per necessaria conseguenza dissonanti, e fra questi varj anche inconcinni, che perciò in fatti non hanno luogo nella nostra moderna scala. Tali sono $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13}$ ecc. Egli è vero, che nell'origine della moderna scala ci entrano soltanto li $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ ecc; ma non può negarsi altresì, che col mezzo di una stretta approssimazione non si insinuino in Musica parecchie ragioni, che ammettono il numero 7., e che adoprandosi queste tutto giorno con approvazione del senso, non si dia malamente al predetto numero il titolo di inconcinno.

Venendo dunque al punto della vera cagione della Dissonanza, dico e sostengo esser opera questa precisamente della proporzione geometrica, formata però dalli soli tre consonanti, ed armonici numeri $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. essendo cosa certa, che dovunque è proporzione geometrica ivi è dissonanza, e dovunque è dissonanza ivi scorgesi a mano sicura la proporzione geometrica. Ho notato di sopra, che la serie $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$ ecc. è consonante quantunque geometrica, e che l'altre serie geometriche sono dissonanti non perchè geometriche, ma perchè contengono numeri impari maggiori del cinque. Ho fatto altresì vedere nel

nel Saggio sopra le Leggi del Contrappunto pag. 61., che alcuni accordi son dissonanti, benchè in essi la proporzione geometrica non contengasi.

Pag. 93. Infatti quattro solamente sono li suoni consonanti, che corrispondono ad $1. \frac{1}{3}. \frac{1}{5}.$ tanto nella scala nostra diatonica, quanto in quella della serie armonica prodotta dalla divisione della corda sonora in $\frac{1}{8}. \frac{1}{9}. \frac{1}{10}. \frac{1}{11}. \frac{1}{12}. \frac{1}{13}. \frac{1}{14}. \frac{1}{15}. \frac{1}{16}.$

Tra questi adunque sono dissonanti: $\frac{1}{9}. \frac{1}{11}. \frac{1}{13}. \frac{1}{14}. \frac{1}{15}.$; de' quali però (cosa rimarcabile) due solamente hanno luogo nella scala nostra, e nella moderna Musica, cioè $\frac{1}{9}$ ed $\frac{1}{15}$, che scorgonsi geometrici, e prodotti da $\frac{1}{3}. \frac{1}{5}$. + La nostra scala è prodotta dai tre accompagnamenti C E G, F A C, G B D. Nasce $\frac{1}{9}$ da D, Quinta di G, il qual D si usa ancora come Nona di C. Nasce $\frac{1}{15}$ da B, Terza maggiore di G, il qual B si usa pure come Settima maggiore di C. Quindi la nostra dissonanza Nona, e Settima maggiore ricevono preparazione dalla Quinta, e dalla Terza maggiore dell'accordo G^5_3. Dovendosi preparare l'Undecima, e la Terzadecima di C, si otterrà ciò coll'Ottava, e colla Decima maggiore dell'accompagnamento F^5_3, e questa è la ragione, per cui io non posso [devo] ~~avere~~ [accettare] in Musica i rapporti $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, che non potrebbero prepararsi, ma fa di uopo ch'io mi serva di quelli, che mi somministra la scala, cioè a dire di $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{40}$, che l'orecchio riferisce alle ragioni prossime fondamentali $\frac{1}{11} = \frac{3}{33}$, $\frac{1}{13} = \frac{3}{39}$. Se la Settima minore nell'accordo G B D F

ha

+ ciò che si fa manifesto nella proporzione continua $1. \frac{1}{3}. \frac{1}{9}$; come pure nella discreta $1 : \frac{1}{3} :: \frac{1}{5} : \frac{1}{15}$.

A B A

ha da poter essere preparata, egli è di-
uopo che serva di preparazione l'Ottava
F dell'accompagnamento F A C. Per la
qual cosa la detta Settima necessariamente
ricava la ragione $\frac{9}{161}$, o sia l'equisona
$\frac{9}{64}$, che per confessione del P. M. Vallotti
il senso riferisce alla prossima $\frac{9}{63} = \frac{1}{7}$,
ch'è fondamentale. Usandosi i rapporti
$\frac{9}{64}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{40}$ come fondamentali, l'orec-
chio li riferisce ai veramente fondamenta-
li $\frac{9}{63} = \frac{1}{7}$, $\frac{3}{33} = \frac{1}{11}$, $\frac{3}{39} = \frac{1}{13}$, che ai sovrascrit-
ti si approssimano colla sola differenza
di un Diesis Enarmonico. Quando la Set-
tima minore si usa come una Nona rivol-
tata, la riferisce l'orecchio alla ragione
$\frac{9}{161}$; ma quando si adopra come dissonan-
za fondamentale, il senso la rapporta alla
ragione fondamentale $\frac{4}{7}$ equisona ad $\frac{1}{7}$.

Seguendo pertanto questa traccia si
dirà $\div$ 1 . $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$: $\frac{1}{27}$; quindi 1 : $\frac{1}{5}$ :: $\frac{1}{9}$: $\frac{1}{45}$,
~~che uniti alli tre primi consonanti~~ e si avran-
no in tal modo li quattro suoni dissonanti
$\frac{1}{9}$. $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{45}$ che uniti alli tre primi con-
sonanti 1 . $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$ compongono l'intera sca-
la. L'intera scala adunque sarà formata
dai seguenti suoni equisoni ai predetti
1 . $\frac{8}{9}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{32}{45}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{16}{27}$. $\frac{8}{15}$, i quali realmen-
te compongono la scala F, G, A, B, C, D, E.
Tale scala per dir il vero è derivata da quel-
la del Tuono C, per terza maggiore, la qua-
le richiede, che ad F si riferiscano i sovra-
scritti suoni. Questo metodo ha l'imperfe-
zione di darci la scala di C relativamente
ad F, sostituendo una base secondaria alla

primaria

primaria. In secondo luogo determina le consonanze E, G dello accompagnamento C E G, ed altresì l'intero accompagnamento G B D col mezzo della quattro dissonanza relativa ad F. Qual è il miglior metodo, o il mio, che cogli accompagnamenti consonanti C^5_3, F^5_3, G^5_3 determina la dissonanza, o quello del P. M. Vallotti; che colla dissonanza relativa ad F determina gli accompagnamenti consonanti C^5_3, G^5_3? Io ho sempre pensato; che le dissonanze debbano servire alle consonanze. Dovendosi preparare la dissonanza, i suoni dissonanti hanno da essere in origine consonanti. Il troppo affetto alla ragione geometrica ha condotto a questi inconvenienti il P. Vallotti.

Pag. 94. Non pertanto debbono essi ($\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13}$) onninamente rigettarsi, avvegnachè per analogia, ed approssimazione possono non di rado venir in uso. Con ciò il nostro ch. Autore aderisce al mio sistema. Accordo ancor io, che $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13}$ non possono esattamente aver luogo nella nostra Musica, essendo 7. 11. 13. numeri primi, e venendo prodotta la Dissonanza dai numeri 3 e 5, e solamente dico, che usate le ragioni $\frac{9}{64}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{40}$ come dissonanze fondamentali Settima, Undecima, e Terzadecima, il senso le riferisce alle prossime veramente fondamentali $\frac{9}{63} = \frac{1}{7}$, $\frac{3}{33} = \frac{1}{11}$, $\frac{3}{39} = \frac{1}{13}$.

Cap. XXXII. pag. 98. Non si annovera fra le Dissonanze la 2.ª, attesochè dovunque, ed in qualunque modo abbia luogo nell'armonia, mai sempre è consonante. Il suono acuto della 2.ª è consonante nei

* Quante, e quali siano le Dissonanze.

rivolti

rivolti $\frac{6}{4}{2}$, $\frac{7}{4}{2}$, $\frac{7}{5}{2}$ di 7.ª, di 9.ª, e di 11.ª Posta nel Basso, la 6.ª nell'accordo della 9.ª, la 10.ª nell'accordo della 11.ª, la 12.ª nell'accordo della 13.ª, il suono acuto della 2.ª è dissonante.

Della Settima.

Cap. XXXIII. pag. 101. Tre sono, e non più, la settima diatonicha, cioè la maggiore $\frac{8}{15}$, e le due minori $\frac{5}{9}$, e $\frac{9}{16}$. La 7.ª maggiore 8. 10. 12. 15.; e la minore 10. 12. 15. 18

F A C E .... A C E G

sono veramente geometriche. Altrettanto non può dirsi della 7.ª minore $\frac{9}{16}$; imperciocchè nell'accompagnamento

36. 45. 54. 64. non abbiamo esattamente

G. B♭. D. F.

la ragione geometrica, essendo giusta la 3.ª minore B♭ D, e calando un comma la D F. Per questo appunto il detto accordo è il vero privilegiato, perchè la 7.ª G F si accosta maggiormente alla ragione $\frac{7}{4}$. Nè vale il dire, che

36. 48. 64. sono in serie geometrica;

G C F

perchè G. B♭. D. F., G C F. sono due accordi diversi, uno fondamentale di 7.ª l'altro rivoltato di 9.ª, ed il suono C, che cogli estremi forma la serie geometrica G C F, non c'entra nell'accompagnamento della 7.ª

Della Nona.

Cap. XXXIV. pag. 104. Dopo la 7.ª, giusta l'ordine delle dissonanze viene la 9.ª, delle quali nel sistema diatonico due sole se ne contano, cioè la maggiore $\frac{4}{9}$, e la minore $\frac{15}{32}$. Nell'accordo 4. 6. 9

F C G

della

dalla 9.ª maggiore è palente la proporzio-
ne geometrica.

La nona minore poi soggiace a più vivi contrasti di quelli, che nella geometri-
ca proporzione negano l'origine dalla dis-
sonanza, atteso che delle due 5.ª che la com-
pongono, una è maggiore, e l'altra mino-
re. Apparisce ciò chiaramente nell'accom-
pagnamento 30. 45. 64. Avverte il

e A♮ ... F

P. Vallotti, che la 5.ª minore A♮ F si usò in Musica in qualità di consonanza, e così ragiona

Pag. 105. Se dunque (la 5.ª minore A♮ F) viene trattata nella pratica come conso-
nanza, e come tale è ricevuta dall'orec-
chio, qual maraviglia, che unita ad una 5.ª esatta porga al sensorio l'effetto di due quinte maggiori, e consonanti, cioè il contrasto, e la dissonanza? Se il divario d'un Semituono non togliesse la similitu-
dine di due intervalli, e la ragione geo-
metrica, ne seguirebbe, che ancora nell'accordo 4. 5. 6. di 3.ª maggiore e 5.ª ¹ sussisterebbe la ragione geometrica, e perciò dovrebbe riputarsi dissonante; conseguenza sommamente assurda. Si osservi nello allegato passo, che dall'effetto di due quinte maggiori, e conso-
nanti deduca l'Autore il contrasto, e la dissonanza; quasi che da due 5.ª dissimili non potesse nascere la dissonanza. Egli è infallibile, che la 9.ª minore è più pic-
cola della maggiore; dunque due 5.ª dissimili cagionano maggior contrasto

¹ composto di due 3.ª una maggiore, e l'altra minore, che differiscono per un minor Semituono,

Di

di due 5.e simili. Secondo i miei principj la 9.a minore prossimissima alla ragione 4 : 27 è più austera della 9.a maggiore 4 : 9; perchè il numero impari 27 è più grande del 9.

Pag. 106. "Ora è cosa certa, che nella terza armonia dell'accordo A la mi re la 13.a trovasi nell'intervallo di 9.a minore, ed è vera dissonanza, perchè 15 : 20 : 24 : 32;
E A C F
Dunque la 9.a minore (in qualunque modo se ne ripartisca l'intervallo) è dissonanza: atteso che sempre trae l'origine dalla proporzione geometrica; cioè dalla 4.a proporzionale $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15}$." Giusta la dottrina del P. Vallotti l'accordo
30 · 40 · 48 · 64 è dissonante, perchè in
E A C F
esso ha luogo la ragione geometrica discreta, essendo E A, C F due 4.e; ma levati i suoni medj A, C, e sostituiti gli altri G, A♭ nell'accordo 30 · 36 · 45 · 64
E G A♭ F
sparisce la ragione geometrica; dunque cessa il fondamento onde poterlo giudicar dissonante. L'accordo della 11.a C G C F è dissonante a cagione delle due 4.e G C, C F. Dirà mai il nostro ch. Autore, che sostituito al suono G il suono A, e tolta di mezzo la ragione geometrica, l'accordo C A C F seguiti ad essere dissonante?

Dell'Undecima.

Cap. XXXV., pag. 107. "Dalla combinazione pertanto di due 4.e in uno stesso accordo nasce l'11.a; delle quali però due diverse

se ne contano nell'ordine diatonico, cioè la minore formata da due 4.e minori, e la maggiore formata da una 4.a maggiore, ed una minore.

L'11.a minore nasce, ugualmente che la 9.a maggiore da 1. 3. 9, ed egualmente

F C G

si spiega in 9. 12. 16. ecc.

G C F

Pag. 107. 108. Qui però sembrami necessario d'avvertire, che la settima 9/16 divisa in due 4.e fa due figure, ed ha doppio uso, attesochè si esprime ora il rivoltamento della 9.a, ed ora l'11.a nella sua base e prima armonia. C'è qui una svista: si dovea dire nella sua seconda [terza] armonia, posta nel Basso la 5.a dell'accordo consonante. La ragione 9/16 è propriamente una 9.a rivoltata, la quale per servire alla consonanza s'usa ancora come 11.a riferita alla seconda parte di mezzo.

Pag. 109. Già si è provato nell'antecedente Cap., che la 9.a minore nasce da proporzione geometrica, dunque lo stesso deve dirsi, ed a più forte ragione dell'11.a maggiore, che nasce da due 4.e l'una maggiore, e l'altra minore, componenti la 7.a maggiore 16/15 dissonanza patentemente geometrica nella sua formazione originaria di 1 : 3 :: 5 : 15. Le ragioni addotte contro la supposta natura geometrica della 9.a minore si adattano ancora all'11.a maggiore. Nell'accordo dell'11.a maggiore 16. 20. 24. 32. 45.

F A C F B♮

Contro

ci entra la 7.ª maggiore C B♭: ma questa secondo il ch. Autore è geometrica; dunque è altresì tale l'11.ª maggiore. La 7.ª maggiore è geometrica, quando viene divisa nel seguente modo
24.. 30.. 36. 45., essendo geometrica
C E G B♭
la proporzione 24 : 36 :: 30 : 45 : ma levati i suoni E, G, e sostituito F, sparisce la geometrica proporzione; e quindi egli è innegabile, che l'accordo della 11.ª maggiore è dissonante, quantunque in esso non abbia luogo la ragione geometrica. Della Terzadecima.
Cap. XXXVI. pag. 110. Trattando il P. M. Vallotti in questo Capitolo della Terzadecima, annovera gli accordi della due 13.ª, maggiore 6. 9.. 12.. 15.. 20., minore
C. G. C. E. A
10.. 15.. 20.. 24.. 32.., che sono senza
A E A C F
dubbio geometrici, a cagione che contengono, quelle due 6.ª maggiori 9.. 15., 12.. 20.,
G E, C A
e queste due 6.ª minori 15.. 24., 20.. 32.
E C, A F
ma nulla dice dei due accompagnamenti
30.. 45.. 60.. 72.. 100.., 45.. 64.. 90.. 108.. 144
D A D F A♭, A♭ F A♭ D G
che sono dissonanti, quantunque in essi non ci entri la proporzione geometrica; essendo nel primo 45.. 72 6.ª minore,
A F
60.. 100 6.ª maggiore; e nel secondo
D A♭

64. 108 6.a maggiore crescente un comma,
F D
e. 90. 144 6.a minore.
B♮ G

Cap. XXXVII. pag. 113. Poichè si è trat= ^ Della Settima diminui-
tato degli altri intervalli eccedenti, e dimi= ta, e della Seconda
nuiti dopo li diatonici e consonanti (appunto eccedente.
perchè s'adoperano come parti integrali
di un accordo consonante) rimane ora a
trattarsi della 2.a eccedente, e della 7.a dimi=
nuita, affine di esaurire tutta la varia spe=
cie delle dissonanze.

La ragione dunque della 7.a ^ diminuita di 75
a 128, come G♯ a F, il cui complemento
è la 2.a eccedente nella ragione di 64 a 75,
come F♮ a G♯ ecc.

Osservo per altro che la ragione della
nostra 2.a eccedente è analoga a quella di
$\frac{1}{8}$ ad $\frac{1}{7}$, attesa la minima differenza di
224 a 225, che v'è fra di loro, e la stessa
differenza trovasi fra la ragione della 7.a
diminuita, e quella di $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{12}$. Ecco co=
me il numero 7. s'insinua in Musica;
avendo provato essere mediante una stret=
ta approssimazione 4:7 6.a ~~superflua~~ eccedente,
7:6. 3.a diminuita, 5:7 4.a maggiore,
7:10 5.a minore, 7:9 4.a diminuita,
9:14 5.a eccedente, 8:7 2.a eccedente,
7:12 7.a diminuita.

L'accompagnamento di 7.a diminuita
75. 90. 108. 128. è veramente geome=
G♯ B♮ D F
trico; perchè formato da due 3.e minori
giuste 75: 90.; 90. 108, e da una mag=
G♯ B♮; B♮ D

canto

cante d'un Comma 106. 106 espressa
D F
dalla ragione 27 : 32. Si usa frattanto l'accordo certamente dissonante

7. 8. 10. 12. di 3.ª diminuita, 5.ª mi=
D♯ F♮ A C

nore, e 7.ª diminuita, il quale non è geometrico; perchè formato da tre 3.ᵉ dissimili, la prima diminuita, la seconda maggiore, e la terza minore. Questa particolarità da me notata nel Saggio alla pag. 61. è dissimulata dal P. M. Vallotti.

Cap. XXXVIII. Della risoluzione delle Dissonanze. pag. 115. Stabilita dal nostro eccellente Maestro la regola da osservarsi comunemente, che le dissonanze si preparino, e si leghino con un suono dell'antecedente accompagnamento consonante, e si risolvano poi discendendo di grado ad un suono del susseguente consonante accompagnamento, soggiunge.

Nondimeno ragionando coi più provetti dico, che mentre il degradar della dissonanza fu avvedutamente prescritto, affine di arricchire l'armonia; perchè separate come le sono la 7.ª dall'8.ª, la 9.ª dalla 10.ª, l'11.ª dalla 12.ª; se ascendendo risolvessero, anderebbono ad unirsi alla già esistente superior consonanza con evidente discapito dell'armonia. In tal ipotesi farebbe d'uopo unire la 9.ª coll'8.ª, l'11.ª colla 10.ª, la 13.ª colla 12.ª, onde senza discapito dell'armonia risolvessero la 9.ª nella 10.ª, l'11.ª nella 12.ª, la 13.ª nella 14.ª, purchè questa sia privilegiata, e possa, ascendendo di 2.ª, introdursi

non

non preparata.

Per altro la mentovata general legge non vieta, che per cambio subentrando l'una all'altra parte nella dissonanza, quella discendendo risolva, e questa ascenda: ciò che non di rado suole praticarsi dagli esercitati Compositori.

Anche per un semituono ascendente può risolversi alcuna dissonanza con ottimo effetto, cioè la 2a minore $\frac{9}{16}$ dalla quinta corda del modo. Ricorda poi, che discendendo anche per salto può risolversi una dissonanza; e che se la dissonanza in due diverse parti sia nel tempo stesso introdotta; mentre per risolvere l'una discende, l'altra deve senza dubbio ascendere: e che finalmente stando immobile il suono dissonante, può trasformarsi in consonante.

Cap. XXXIX. Del Rivoltamento delle Dissonanze. pag. 117. Qualunque trasposizione facciasi nei termini di una data ragione, suol chiamarsi rivoltamento; più per abuso però, che per ragione. Si dà rivoltamento, ed anche compimento di Ragioni: due termini che in vero sembran sinonimi, ma non lo sono. Ho già dichiarato di sopra, che il vero rivoltamento segue, quando negli intervalli fondamentali, a cui serve di Basso un termine della serie 1. 2. 4. 8. 16. ecc., il suono acuto trasportato in giù una o più Ottava si fa diventar più grave della base. 4 : 6, 8 : 10 sono due ragioni fondamentali, 3 : 4, 5 : 8 i loro rivolti. Può anche seguir il rivolto trasferendo la base all'Ottava alta, onde per esempio le ragioni fondamentali

fondamentali 2:3, 4:5 si cangino nelle rivoltate 3:4, 5:6.

Spiegata la natura dei compimenti, e dei rivolgimenti, ~~[illegible]~~ delle rispettive ragioni consonanti, debbo avvertire i miei giovani lettori, che le accordi rovesciati sono seguiti e ricevuti, e lo vera mente chiamo gli accordi consonanti di 3.ª e 6.ª, di 4.ª e 6.ª derivati dai fondamentali di 3.ª e 5.ª. Tuttavia egli è certo, che l'accordo 5. 6. 4. riferisce al Basso una 3.ª maggiore rivoltata, e l'accordo 3. 4. 6. fa corrispondere al Basso una 5.ª rivoltata

= Pag. 116. Dopo questa premessa vengo al punto di cui si tratta, e dico che alla dissonanza (per natura collocata nell'acuto) in ispezialità, ed in proprietà appartiene il rivolgimento. Il rivolgimento appartiene a tutti gli intervalli fondamentali, eccettuata la 8.ª, 1:3, 1:5, 1:7, 1:9, 1:11, 1:13 ecc., ed intanto si dà il rivolgimento della dissonanza, inquanto che si usano o come eccitanti, o come rappresentanti le ragioni fondamentali 1:7, 1:9, 1:11, 1:13, 1:15.

= Pag. 122. Art. IV. Dopo la 13.ª segue la 14.ª, che per uso inveterato e comune si chiama 2.ª Nondimeno è verità patente, che nel primitivo accordo consonante 4. 5. 6. 8. non ha luogo né la settima

F. A. C. F.

maggiore $\frac{8}{15}$, né la minore $\frac{9}{16}$, e né pure l'altra minore $\frac{5}{9}$, che in questi suoi numeri primi patentemente si scorge di essere una 9.ª nella seconda armonia del primitivo accordo

accordo consonante. La Tromba, che tra 6. ed 4. vi pone il 7.; fa vedere, che la 7.ª minore precede la 9.ª. Il P. M. Vallotti usa il suono 7. della Tromba come 7.ª minore, ed egli stesso ha insegnato ai Professori di tale stromento l'esistenza del detto suono. I rapporti $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{16}$ non si potevano trovare prima del numero 9, perchè in essi ha luogo lo stesso 9.

= Pag. 124. Quindi è, che nella pratica la settima della 5.ª corda G, come pure quella della 7.ª corda B♮ si adoprano senza preparazione, e senza legatura; perchè cioè si accostano alla ragione 4 : 7 colla sola differenza $\frac{64}{63}$. Questa concessione del nostro Autore conferma invincibilmente il mio sistema. Imperciocchè per una parte egli è noto, che le dissonanze 7.ª, 9.ª, 11.ª, 13.ª degradano ordinatamente di perfezione, e per l'altra accordandosi, che la 7.ª minore goda il privilegio di usarsi non preparata, in quanto che si avvicina alla ragione 4 : 7 più semplice di quella della 9.ª 4 : 9; egli è di uopo inferire, che dovendosi certamente preparare la 11.ª e la 13.ª, ciò non addiviene a cagione dei rapporti 3 : 8, 3 : 10, 5 : 16, che sono consonanti, ma bensì in quanto che si avvicinano ai rapporti dissonanti fondamentali 4 : 11, 4 : 13, che sono meno semplici non solo di quello della 7.ª, ma ancora di quello della 9.ª.

= Cap. XL. Della combinazione di varie dissonanze. Art. I. Della Nona, e Decimaterza.

pag.

pag. 126. Il P. M. Vallotti alla citata pagina assegna alla 13.ª maggiore la ragione 6 : 27; il che non ha difficoltà di accordare, perchè è fondamentale, e perchè assai più si accosta al rapporto 3 : 10 di quello faccia la ragione 4 : 13. Si avvicina questa al rapporto 5 : 16? colla sola differenza $\frac{65}{64}$, e perciò è molto atta a rappresentare la 13.ª minore.

Non altrimenti si potrebbe dire, che la ragione 4 : 11, che differisce dalla 5 : 14 per il divario $\frac{55}{56}$, rappresenta l'11.ª maggiore; e che la ragione 6 : 21 calante da 3 : 4 per $\frac{63}{64}$ rappresenta l'11.ª.

Art. II. Della Settima, e Undecima. pag. 127. Il nostro celebre Professore, trattando della 7.ª e della 11.ª insieme unite, esprime la 11.ª per la ragione 10 : 27, che non differisce dalla 4 : 11 salvochè per $\frac{54}{55}$, ma contiene il difetto di non essere fondamentale.

Cap. XLI. Dei gradi Diatonici. pag. 132. Dopo aver trattato della dissonanza, indispensabile cosa sembrami di parlare anche dei gradi diatonici, atteso che bene spesso sentomi suonar alli orecchio, che dovunque è tuono o semituono, ivi pur anche è dissonanza; quasi che dai gradi originare sieno le dissonanze, mentre per lo contrario da esse prendono le origine, e la situazione gli stessi tuoni e semituoni. I gradi diatonici traggono l'origine dalle consonanze, e non dalle dissonanze; ed intanto dilettano, inquanto conducono da consonanza a consonanza.

Egli

egli è vietato dal Contrappunto di usarli, quando si guidano da una consonanza ad una dissonanza, che esige di essere preparata. Peggior effetto ne nascerebbe, se passassero da una dissonanza all'altra, esempigrazia dalla 13.^a maggiore alla 14.^a maggiore. Si sentono con piacere, qualora fanno transito da una dissonanza ad una consonanza; perchè liberano l'orecchio dal seguitare ad udire il precanto della dissonanza. Io ho spiegato queste verità nel mio *Saggio*, e non so come il ch. Autore possa opinare diversamente. Ho già notato di sopra, che le consonanze hanno da precedere le dissonanze, dovendo queste esser preparate da quelle.

Cap. XLII. *Dell'Analisi dei Gradi Diatonici.*

pag. 135. *Ciò che più rileva però si è, che dati due suoni contigui, tosto si è manifesto il vicendevole contrasto; ma non perciò sono ambidue nel tempo stesso dissonanti.* Qui si è dell'equivoco. Bisogna distinguere la melodia dall'armonia. Usati melodiosamente due suoni contigui, non c'è vicendevole contrasto, quando conducono da consonanza a consonanza. Il contrasto nasce qualora passano da consonanza a dissonanza, da dissonanza a dissonanza. Usati i detti suoni armonicamente, uno almeno è dissonante, e possono essere dissonanti amendue; il che succede quando si congiungono le due dissonanze 13.^a e 14.^a

Pag. 137.

Pag. 137. E poichè si sono accennati anche li semituoni cromatici, che appartengono al sistema inspessato, in primo luogo ci si presenta il cromatico semituono detto il minore

$\frac{24}{25} = \frac{4 \times 6}{5 \times 5}$ | $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$ | 20 : 24 : 25 : 30
A C C# E

Veggonsi dunque nell'analogia di questo minor semituono due 3.e maggiori, e due minori, e dei due accordi consonanti l'uno diatonico e naturale 10 . 12 . 15 con l'aggiunta di 25 : l'altro trasportato 20 . 25 . 30 con l'aggiunta di 44. Da coteste combinazioni pertanto
A C E C#
A C# E
C♮

risulta l'impiego simultaneo del semituono $\frac{24}{25}$, che per verità non è affatto impossibile; richiede nondimeno un particolar artificio, e questi riservato soltanto all'espressione di qualche sentimento aspro assai, e piccante: in somma può riputarsi nella Musica il semituono $\frac{24}{25}$ come semplice intervallo di melodia, ed escluso dall'armonia. Io ho veduto usato armonicamente il Semituono $\frac{24}{25}$ dal Sig. Antonio Lotti per esprimere la parola conturbata sunt viscera mea mediante la successione degli accordi G B D, G♮ G# B D, F♮ G# B D ecc.

Cap. XLV. Della prerogativa della Quadrupla pag. 144. La quadrupla è consonanza vera e reale, non già in forza di prevenzione, di abuso, e tolleranza (come asserisce

un

un celebre Autore) ma per natura sua, e per origine.

Essa è formata, è vero dai due quadrati 1. e 4.; ed io pure sostengo, che li suoni corrispondenti a due quadrati sono fra di loro dissonanti; ma non già quelli che corrispondono alla quadrupla, che perciò si distingue appunto, e trionfa sopra tutta la serie dei quadrati. Il quadrato, il cubo, il quadrato-quadrato ecc. della ragione 1:2 sono sempre consonanti; perchè in essi non c'entra numero impari maggiore dell'unità. I quadrati, i cubi ecc. delle altre ragioni per esempio 1:3, 1:5 divengono dissonanti; perchè v'entrano numeri impari maggiori del cinque, ch'è l'ultimo numero dispari consonante.

Pag. 146. Ogn'uno sa che $\frac{1}{3}$ è il mezzo armonico della dupla $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, ma s'ignora comunemente, o si dissimula, che $\frac{1}{5}$ è il mezzo armonico della quadrupla $\frac{1}{2} : \frac{1}{5} : \frac{1}{8}$, essendone questo il vero fonte. È da osservare che prima si trova la 8ª indivisa $1 \cdot \frac{1}{2}$, indi la sua divisione $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ in 5ª ed in 4ª ambo indivise, e poscia la divisione della 5ª $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ nelle due 3ª maggiore e minore amendue indivise; mi ha sempre persuaso, che $\frac{1}{5}$ nasca principalmente dalla divisione della 5ª. Si verifica altresì, che $\frac{1}{5}$ sia mezzo armonico fra 1 ed $\frac{1}{5}$. Chi dirà mai che $\frac{1}{5}$ nasca dalla divisione dell'intervallo $1 : \frac{1}{5}$? Facendo nascere $\frac{1}{5}$ dalla divisione della quadrupla, gli si dà un'origine

origine troppo perfetta; e deducendo $\frac{4}{5}$ dalla divisione della quintupla, se gli assegna un'origine troppo imperfetta.

Pag. 150. Per vero dire due mezzi ammette la semplice quadrupla, in 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. ma niuno dei due è mezzo armonico. Mettendosi fra 1 e $\frac{1}{4}$ due frazioni medie in serie armonica, egli è chiaro, che nè l'una, nè l'altra non può essere media armonica.

Ad $\frac{1}{9}$ corrisponde in perfetta equisonanza $\frac{4}{9}$; quindi in vigore della accennata legge, dovrebbe il 9 essere annoverato alle consonanze, ma la geometrica proporzione, principio e cagione della dissonanza, ne lo esclude. Lo esclude l'esser esso un numero impari maggiore del cinque.

Pag. 157. Ora da quanto fin qui si è detto rilevasi, che i mezzi armonici, da cui dipendono le consonanze, e li gradi della melodia, devono cercarsi nelle successive potenze della dupla, eccettuatone il semituono diatonico, che suoprasi mezzo della sesquiterza armonica 14. 15. 16. ; essendo infatti il minore dei due semituoni, in cui risolvesi il tuono massimo $\frac{7}{6}$, che nel genere diatonico non ha luogo. La ragione $\frac{7}{6}$ nel Cromatico è propriamente 3.a diminuita, siccome composta di due Semituoni maggiori, o 2.e minori 14 : 15, 15 : 16. Considerata la ragione $\frac{4}{5}$ come 3.a, il suo compimento $\frac{7}{6}$ alla 6.a merita il titolo di Tuono massimo.

Cap.

Cap. XLVI. Dell' uso della proporzione geometrica nella Musica. pag. 152. La cagione poi del diletto che ricevesi dalle consonanze stesse tutta risiede nella progressione duplo-continua che regna fra le parti consonanti della serie armonica nella corda sonora, e li rispettivi residui, come qui si vede.

Parti consonanti della serie armonica	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$
Residui della corda sonora	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

Ella è singolare l' idea del ch. Autore. In cambio di dedurre il diletto delle consonanze dalle semplici ragioni $1 : \frac{1}{2}$ e $1 : \frac{1}{3}$, $1 : \frac{1}{5}$, che sono comprese dal senso, lo vuol derivare dal paragone delle parti della corda coi loro residui, il cui suono all' orecchio non rendesi manifesto:

Cap. XLVII. Dei Numeri Platonici. pag. 160. Ingenuamente pertanto confesso, che considerati i numeri Platonici (4. 5. 6. 12. 15. 16. 36. 45. 54.)
F A C 'C E G 'G B♭ D
come tutti aggregati di Unità, l' armonia dei corrispondenti suoni scorgesi variegata e disordinata, nè può regersi. ecc.

Qui potrebbe forse dirmi alcun moderno, che tale è l' andamento delle vibrazioni ecc. Dico però che il ripiego non ha luogo, mentre non può negarsi che della materia la maggior porzione rappresenta ed esprime sempre il grave, e la porzione minore rappresenta l' acuto; e dei corpi sonori in genere li maggiori producono il suono più grave in confronto delli minori, che rendono l' acuto. Ed

appunto

appunto per questo il numero delle vibrazioni fatte in dato tempo dai corpi maggiori più gravi è minore di quello dai corpi minori più acuti; e quindi alle corde $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{5}.\ \frac{1}{6}$... corrispondono i numeri di vibrazioni 1. 2. 3. 4. 5. 6. ...

Cap. XLVIII. <u>Che da $1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{5}.$ derivi tutto il nostro sistema musicale</u> pag. 167.

Il P. M. Vallotti nell'ultimo Capitolo, in cui ottimamente sostiene, che da $1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{5}.$ deriva tutto il nostro sistema musicale, pone la seguente figura, che secondo lui ci dipinge tre accordi consonanti, e tre dissonanti.

Orizzontali

armonici e consonanti

Perpendicolari armonici e dissonanti

1.	3.	5.
F	C	A
3.	9.	15.
C	G	E
9.	27.	45.
G	D	B♮

Io accordo, che le tre colonne orizzontali dinotino tre accordi armonici consonanti: ma considerando, che la Musica è una successione di armonici accompagnamenti, sostengo che le colonne verticali principalmente ci pongono sotto gli occhi i passi di melodia, che ci conducono da un accompagnamento all'altro. Movendo per esempio il passo C D, faccio transito da C base dell'accordo C G E a D 5.a dell'accordo G D B♮; e movendo il

il passo CA, mi trasferisco dalla detta base ad A 3.a maggiore dell'accordo F C A. Quindi i vani, che restano fra consonanza e consonanza nell'accordo C E G C, si riempiono nella scala del tuono C per 3.a maggiore

5	6	6	5	5	6	6	5
3	4	3	3	3	3	3	3
C	D	E	F	G	A	B♮	C

con D 5.a di G, a cui si dà l'accompagnamento D^4 derivato dal fondamentale G^5_3; con F base di F^5_3; con A 3.a maggiore di F, a cui si dà l'accordo A^6_3 derivato da F^5_3; con B♮ 3.a maggiore di G, a cui si assegna l'accordo $B♮^6_3$ derivato da G^5_3. Senza questo ufficio primario delle colonne verticali sarebbe distrutta la Musica, la quale si ridurrebbe ad un solo consonante accompagnamento.

Gli stessi suoni D, F, A, B♮ nella loro origine consonanti in riguardo alle basi G, F, che colla base principale C hanno la ~~corrispondenza~~ nell'ottima relazione di 5.a presa all'insù, e all'ingiù, gli stessi suoni dico si adoprano come dissonanze aggiunte all'accordo C G E. O amando, o esigendo la dissonanza di essere preparata, egli era necessario che il suono dissonante rispettivamente al detto accordo fosse consonante nell'accordo precedente. Così con D 5.a di G si prepara la 9.a C G D E, con F base di F^5_3, che corrisponde a C in 4.a, si prepara l'11.a C E G C F, con A 3.a maggiore di F si prepara la 13.a C G C E A, e finalmente con B♮ 3.a maggiore di G

si

si prepara la 7.a maggiore C E G B♮. Ed ecco come negli accordi dissonanti si insinua necessariamente la ragione geometrica, trovandosi nell'accordo della 9.a due 5.e C G, G D; in quella dell'11.a due 4.e G C, C F; in quelle della 13.a due 6.e maggiori G E, C A; e per ultimo in quella della 7.a maggiore due 3.e maggiori C E, G B♮. Dove c'è ragione geometrica prodotta dai numeri 3. 5. abbiamo certamente la dissonanza, ma non privativamente, esistendo la dissonanza anche dove non c'è ragione geometrica, come per esempio accade nella 9.a minore. Aggiungo di più in favor della ragione geometrica, ch'essa renda nel suo genere più miti le dissonanze; non potendo negarsi, che la 9.a maggiore, in cui ha luogo la mentovata ragione, non sia meno piccante della 9.a minore, che non la ammette.

Resta che siccome il ch. Autore concede, che la 7.a minore è privilegiata, in quanto che si accosta alla ragione $\frac{4}{7}$, così convenga meco trattarsi con rigore l'11.ma e la 13.a non perchè accettano i rapporti per se stessi consonanti $\frac{7}{32}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{64}$, ma perchè si avvicinano alle ragioni dissonanti fondamentali $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$ ~~e più esattamente $\frac{2}{21}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{1}{13}$~~.

= Pag. 164. Non si vuol già che sia questa la scala, ch'è base e fondamento del modo maggiore armonizzata; ma è vero altrettanto esser questa una delle

sette

setta diatonicha scala. La scala, di cui parla l'Autore, é dedotta dalla sovra scritta figura, che ci dá

1. 3. 5. 9. 15. 27. 45

F · C · A · G · E · D · B♮, i quali suoni approssimati, ed ordinati determinano la detta scala

F G A B♮ C D E F

$\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{15}{16}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{15}{16}$

32. 36. 40. 45. 48. 54. 60. 64.

ch'é derivata da quella del Tuono C per 3.a maggiore, ed é una fra le sette diatonicha. Se il P. M. Vallotti avesse posto $C = 1$, $G = 3$, $E = 5$; $G = 3$, $D = 9$, $B♮ = 15$; $F = \frac{1}{3}$, $C = 1$, $A = \frac{5}{3}$, gli si sarebbe presentata la scala ridotta

C D E F G A B♮ C

$\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{15}{16}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{15}{16}$

24. 27. 30. 32. 36. 40. 45. 48.

ch'é base e fondamento del Modo maggiore armoniale.

Rimangono pertanto esclusi come inconcinni li suoni corrispondenti alli numeri 7. 11. 13. e dalla loro esclusiva la cagione é patente, forte, e chiara: perciocché sono essi li mezzi armonici delle tre consonanze secondarie, cioé di meri complimenti. Essendo la scala del Modo maggiore formata da tre accompagnamente 1. 3. 5. fondati sulle basi $\frac{1}{3}$. 1. 3. egli é manifesto, che in essa scala non possono aver luogo salvoché i numeri impari consonanti 1. 3. 5., ed i loro composti. Questa é la vera ed

unica

unica cagione della esclusione dei numeri impari dal 13. i quali essendo primi, non possono essere composti del numero 1. o sia 2. 4. 8. ecc., e dei numeri 3. 5. Concedendo per altro il nostro celebre Professore ~~Autore~~, che la 7.ª minore intanto è privilegiata, inquanto si accosta alla ragione 4 : 7; ammette in qualche modo la divisione armonica della 4.ª $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{8}$; ed in simil guisa ha pur da ricavare le divisioni $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{11}$. $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{13}$. $\frac{1}{14}$ a ~~cagione~~ affine di ~~di~~ rendere la ragione, per cui si vadano scemando di perfezione, e la 11.ª, e la 13.ª si usino in Musica con tutto il vigore.

Del moto di un corpo discendente lungo un lato retto di un triangolo materiale, che può camminare liberamente sopra un piano parallelo, o inclinato all'orizzonte.

Dissertazioni quattro Fisico-Matematiche del Sig. Conte Giordano Riccati

La prima stampata nel Tomo IX della Raccolta Ferrarese pag. 99.

La seconda nel Tomo X della stessa pag. 69.

La terza nel Tomo XII pag. 3.

La quarta nel Tomo   della stessa Raccolta pag.

Introduzione.

Nel tomo terzo delle Opere del celebratissimo Sig. Giovanni Bernoulli leggesi la soluzione del seguente

Problema

Sit ACK (Fig. 1) triangulum materiale rectangulum in K, quod super planum horizontale DH sine omni frictione moveri possit. Sit etiam corpus grave m, quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore, triangulum jugiter ab eo pressum retro cedere cogatur. Quaeritur tum corporis, tum trianguli velocitas, tum etiam via quam corpus ex motu composito describit, atque utriusque lex accelerationis.

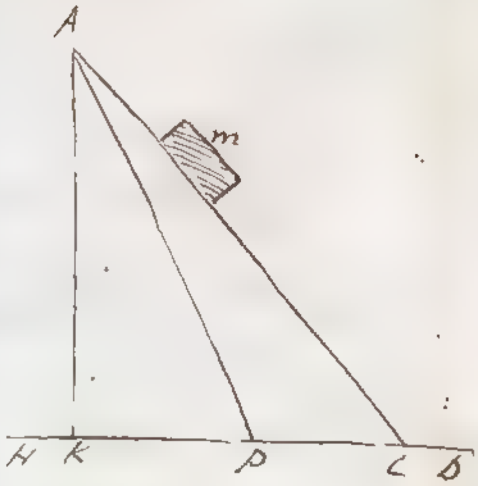


fig. 1

Dissertazione I.

Dal Moto di un Corpo discendente lungo un lato retto di un triangolo materiale, che può camminare liberamente sopra un piano orizzontale.

Meditando su tale materia, mentre non aveva alle mani le mentovate Opere, mi è venuto in mente un metodo semplicissimo, col quale si può trattare il Problema più generalmente supponendo che il triangolo materiale possa camminare liberamente sopra un piano parallelo, o inclinato all'orizzonte.

Problema I

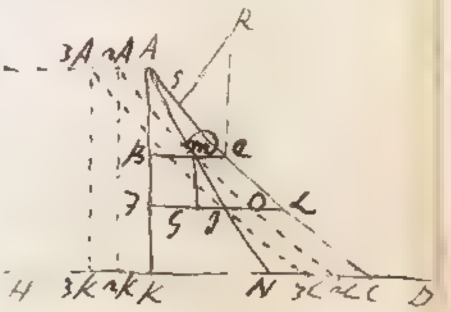


fig. 2

Sia ACK (fig. 2) un triangolo rettilineo materiale rettangolo in K, il quale si possa liberamente movere senza attrito alcuno lungo il piano orizzontale DH. Un corpo grave m cominciando a discendere nel punto A per la retta AmLC, ed il triangolo, ut supra, spinga, si domanda qual linea AmJN relativamente allo spazio immobile verrà descritta dal corpo m.

Supponghi che il corpo m sia pervenuto nel sito m, ed avendo il triangolo ACK

venendo ...

256

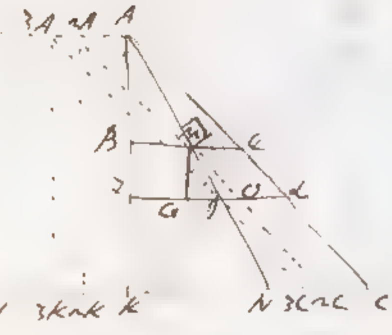


Fig. 2

Problema I.

verticalmente per lo spazio Cm ci si trovi nel medesimo istante nella posizione 2A 2C 2K. Seguiti poscia il corpo m a scorrere lo spazio minimo m7. Pei punti m, 7 si tirino le due linee orizzontali BmC, 77L, e si conduca pure la verticale mG, e la linetta mO parallela alla retta AC ~~ACLC~~. Si chiamino AK = a, KC = b, AB = x, B7 = mG = dx, Bm = y, G7 = dy, BC = z, GO = dz, la massa del corpo m = m, quella del triangolo ACK = M.

La velocità del mobile m per il minimo spazio m7 si risolve in due, una verticale per lo spazio mG, e l'altra orizzontale per lo spazio G7. Si osservi, che nello stesso tempo che il corpo m si avanza orizzontalmente da G sino a 7, il triangolo ACK con moto contrario scorre lo spazio O7. Questi opposti movimenti si ponno attribuire ad una forza media fra il corpo, e il triangolo, la quale agendo contro entrambi le masse spinge l'una a destra, e l'altra a sinistra.

È proprietà di una forza media fra due corpi o variabile, o costante che sia, l'imprimere ad essi eguale quantità di moto, perchè si adempia la condizione, come nel nostro caso succede, che i corpi si movano per quella direzione, per la quale agisce la forza.

~~...~~ Poichè gli spazi G7 = dy, O7 = dz − dy si passano dalle masse m, M nello stesso tempicello, serbano essi spazj la ragione delle velocità dei mentovati corpi, e perciò dovendo eguagliarsi le quantità di moto ci si presenterà l'equazione (1) $m\,dy = M.\overline{dz - dy}$

che si riduce alla seguente $\frac{\overline{m+M}}{M} \cdot dy = dz$

e integrando senza aggiungere costante; imperciocché nel sito A si eguagliano a nulla tanto y, quanto z

$\frac{m+M}{M} \cdot y = z$ (3). In cambio di z si sostituisca il suo valore dato per x, che si ricava ~~comunemente~~ dalla equazione dal triangolo noto ~~[illegible]~~ AKC e saremo pervenuti alla equazione, che determina la linea AMJN percorsa dal corpo M, richiesta. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Ad una stessa ascissa AB = x corrispondendo le ordinate Ba = z, Bm = y, che si ~~[illegible]~~ riguardano nella proporzione data di ~~y~~ m+M : M, ne segue che supponendosi retta la linea AaC, è parimente tale anche la AMN. Al triangolo AKC serva l'equazione ec.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Sia ~~[illegible]~~ equazione $\frac{bx}{a} = z$ (4), e sostituito in cambio di z il suo valore nella formola (3), troveremo $\frac{m+M}{M} \cdot y = \frac{bx}{a}$, o sia $\frac{m+M \cdot ay}{Mb} = x$ (5).

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\frac{[illegible]}{a^2}$

~~[illegible]~~

$\frac{m+M \cdot [illegible]}{M}$ ~~$\frac{cbx^2}{a^2}$ [illegible]~~ (7)

~~Mb~~

formola

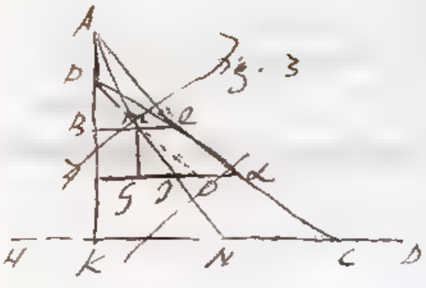
260

Problema I

[illegible]

[illegible]

Corollario I



[illegible] (fig. 3) [illegible]

[illegible] $\frac{M}{M}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\quad}{M}$ [illegible]

$\frac{\quad}{dy}$ [illegible] $\frac{\quad}{dz}$ [illegible]

$\frac{ydx}{dy}$ [illegible] $\frac{z\,dx}{dz}$ [illegible] $\frac{\quad}{dz}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\quad}{dy}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

Corollario I°.

Se la massa M del triangolo ACK si eguagliasse a nulla la formola (3) si trasformerebbe così $\frac{my}{0} = z$ e moltiplicando per nulla $my = 0$, onde $y = 0$; Quando per tanto y = 0 [illegible] ad x qualunque valore, ne segue, che il grave m, a cui il triangolo privo di massa non potrebbe recare veruno impedimento, discenderebbe per la verticale AK.

Corollario II°.

[illegible] infinita la massa M del triangolo

ACK

A C K, e dalla equazione (3) si avrà: veduto essere $y = z$. Si deduca poi che in tale ipotesi non potendo retrocedere il triangolo infinitamente mosso, il corpo m discenderebbe per la ~~stessa~~ retta A e L C.

Problema II.

Determinare le velocità del grave m, e del triangolo A C K, la cui massa M.

Nominate u, U le velocità dei corpi m, M, e dicendo per g il peso del mobile m, ovvero che le forze vive acquistate dalle masse m, M sono effetto della azione della gravità del corpo m. Pervenuto questo nel sito m, la gravità vi è applicata allo spazio $AB = x$, e quindi avremo per le note formole

$$gmx = \frac{mu^2 + MU^2}{2} \quad (6).$$

Ma scorrendosi dalle masse m, M gli spazj $mJ = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $CJ = dz - dy$ nello stesso tempuscolo, le velocità u, U serbano la ~~ragione~~ dei detti spazj, ed essendo ricavato per la formola (2) $\frac{M\,dz}{m+M} = dy$. Sostituito in numero di dy il suo valore, si ripresenterà l'analogia effettuati prima i dovuti calcoli

$$\sqrt{m^2 + 2mM + M^2 \cdot dx^2 + M^2 dz^2} : m\,dz :: u : U,$$

la quale ci insegna essere $\frac{mu\,dz}{\sqrt{\overline{m+M}^2 \cdot dx^2 + M^2 dz^2}} = U$,

$$\frac{U\sqrt{\overline{m+M}^2 \cdot dx^2 + M^2 dz^2}}{m\,dz} = u.$$

Sostituisco primieramente

Problema II.

primieramente l'una; ed indi sostituendo i valori di questi valori nella equazione (6), e ridotti i computi p. nono

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot\overline{m+M}^2\cdot dx^2+M^2 dz^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2\cdot dx^2+\overline{mM+M^2}\cdot dz^2}} = u \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot m^2 dz^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2\cdot dx^2+\overline{mM+M^2}\cdot dz^2}} = U \quad (8)$$

Pongasi in cambio di dz l'equivalente valore espresso per x, e dedotto dalla nota equazione della ~~curva~~ triangolo AEKC; e ne risulteranno due nuove formole, nelle quali le velocità u, U delle masse m, M saranno date per lo spazio x, a cui si applica la gravità del corpo m, e per le costanti. E poiché

~~[illegible]~~

~~Sia AE ... [illegible]~~

$\frac{bx}{a} = z$, e conseguentemente $\frac{bdx}{a} = dz$. Adempiuta la surrogazione, avremo

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot\overline{m+M}^2\cdot a^2+M^2 b^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2\cdot a^2+\overline{mM+M^2}\cdot b^2}} = u \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot m^2 b^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2\cdot a^2+\overline{mM+M^2}\cdot b^2}} = U \quad (8)$$

~~Se la curva ... [illegible] parabola ... [illegible]~~
~~[illegible] $\frac{bx^2}{a^2}$ [illegible]~~
~~[illegible] $\frac{2bxdx}{a^2}$ [illegible]~~
~~Sostituendo questo valore [illegible]~~
~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible formulas]~~

~~[illegible]~~

Corollario II.

Deriva immediatamente per mezzo le formole (7) (8) esprimenti le velocità u, U dei corpi m, M, si trova che in due casi fra loro dalli loro rimotissimi, cioè a dire quando la massa M del triangolo, o è uguale a nulla, o è infinita, la velocità u del mobile m ha lo stesso valore $\sqrt{2gx}$, che lo deve competere, quando tutta l'azione della gravità si impiega nel moto del corpo m. Ciò interviene nei due mentovati incontri; imperocchè nel primo nessuna azione si spende a muovere una massa eguale a nulla, e nel secondo non si consuma veruna azione a imprimere velocità al corpo infinito M, che rimane immobile.

Quando la massa $M = 0$, si trova la velocità del triangolo ACK valutata dire $U = \frac{[illegible]}{[illegible]}\sqrt{2gx}$. Ma nella stessa ipotesi la velocità del corpo m, ridotta, $u = \sqrt{2gx}$; dunque si verifica l'analogia

Problema II.

AK = a, CK = b e lo stesso dicasi di qualunque altra coppia di spazj, che si riguardano nella stessa ragione per esempio AB, aA; A7, L7.

analogia $u : U :: a : b$, la quale ci insegna, che i mobili m, M nello stesso tempo scorrono gli spazj [illegible]. Questa conclusione ci adduce a conseguenza, che il corpo m discende per la verticale AK, come ho notato [illegible] nel Corollario 7 del Problema I

Posta infinita la massa M del triangolo ACK si ha pertanto $U = \frac{\sqrt{2gx \cdot m \cdot b^2}}{\sqrt{M^2 \cdot a^2 + b^2}}$

valore infinitamente piccolo, ed adequatamente eguale a nullo, che fa vedere restar immobile in tal caso il triangolo nominato.

Nella medesima supposizione troveremo

$$gmx \cdot \frac{m \cdot b^2}{M \cdot \overline{a^2 + b^2}} = \frac{MU^2}{2}$$

, e ci accorgeremo che una menoma parte della azione gmx della gravità si impiega a generar forza viva nel corpo infinito M, e che per conseguenza tutta una azione adequatamente si adopra a produrre la forza viva della massa finita m.

Problema III.

Determinare le forze, che direttamente spingono i corpi m, M per gli spazj M7, O7

Si dicano queste forze f, φ, e per le note formole avremo

$$S\, f \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{mu^2}{2}$$

$$S\, \varphi \cdot dx\, dy = \frac{MU^2}{2}$$

Problema III.

Pongo in vece di dy il suo valore $\frac{Mdz}{m+M}$, ed in cambio di u, U le equivalenti grandezze, e rovescio delle equazioni 7, e 8 che mi si presentano

$$S \frac{f\sqrt{m^2+2mM+M^2 \cdot dx^2 + M^2 dz^2}}{m+M} = gmx \cdot \frac{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + M^2 b^2}{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + mM + M^2 \cdot b^2}$$

$$S \frac{F \cdot mdz}{m+M} = gmx \frac{Mmb^2}{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + mM + M^2 \cdot b^2}$$

~~Quindi [illegible]~~

~~[illegible]~~ (9.)

~~[illegible]~~ (10.)

In luogo di dz sostituiscasi il suo valore dato per x, il quale si ricava dalla conosciuta equazione $\frac{b\,dx}{a} = dz$ della triangolo ~~retta~~ $A \# KC$, e ne nasce: ad effettuare la sommatoria, e tutta la divisione per x, la sottoscritta ~~varieto i~~ due formole in cui le grandezze delle forze f, F saranno espresse per la sola costanti ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

calcoli, e ~~troviamo~~

$$f = \frac{gma\sqrt{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + M^2 b^2}}{\overline{m+M} \cdot a^2 + Mb^2} \quad (9.)$$

$$F = \frac{gmMab}{\overline{m+M} \cdot a^2 + Mb^2} \quad (10.)$$

266

Problema III.

Indicare i valori costanti delle forze f, 7 in conseguenza, che nella [illegible] i due mobili m, M verrebbero accelerati colle leggi dei gravi cadenti.

[illegible] nella eguaglianza [illegible] dopo [illegible]

$f = [illegible]$

$7 = [illegible]$

Corollario II.

Se la massa del triangolo $M = 0$, la formula (9) si trasformerà così: $f = gm$. In fatti ricordandosi il Corollario III del Problema I, che in tale ipotesi la massa m discenderebbe per la verticale AK, ed il Corollario II del Problema II, che tutta la azione della gravità gm si impiegherebbe nel moto della [illegible] massa, ne segue necessariamente, che la detta [illegible] sarebbe essere sollecitata dalla forza $f = gm$ come si è ritrovato.

Nella stessa supposizione di $M = 0$ si trova $7 = 0$, richiedendosi una forza nulla a mettere in moto una massa eguale a nulla.

Corollario II.

Fingendo infinita la massa M del triangolo ACK si ci presenta $f = \frac{gm[illegible]}{\sqrt{[illegible]}}$.

Il Corollario III del Problema I ci avvertisce, che

$\frac{a g m}{\sqrt{a^2 + [illegible]^2}}$

che nell'atto incontra il corpo m cade abbasso per la ~~[illegible]~~ retta ACLC, e quindi f deve eguagliarsi alla forza ~~tangenziale~~ nascente dalla nota risoluzione della gravità. Condotta ~~[illegible]~~ per tal guisa che dalla nuova AKCKC, sia (fig. 2) la verticale $CR = gm$, e menata RS normale a CA, sarà $CS = f$. forza ~~tangenziale~~. Dunque dalla similitudine dei triangoli CAK, RCS, avremo

$$CA : AK :: CR : CS$$

$$\sqrt{a^2+b^2} : a :: gm : \frac{agm}{\sqrt{a^2+b^2}} = f$$

analogia, da cui si deduce $f = \frac{agm}{\sqrt{a^2+b^2}}$, che è il valore da noi ~~[illegible]~~ assegnato alla forza; (?)

Ritenuta la medesima ipotesi di $M = \infty$ si trova $\mathfrak{F} = \frac{gmab}{a^2+b^2}$

Questa forza, che spinge con direzione orizzontale il corpo infinito M si applica allo spazio $OD = dz - dy$ (fig. 1); laonde ne nasce $\frac{m\,dz}{M}$ i momenti elementari $\mathfrak{F}\frac{m\,dz}{M} = \frac{gm^2ab\,dz}{M\cdot a^2+b^2}$. Quindi la somma delle azioni di tal forza

$$\int \mathfrak{F}\frac{m\,dz}{M} = \frac{gm^2ab\,z}{M\cdot a^2+b^2} + . \text{ Dalla}$$

ultima formula si raccoglie, che l'aggregato delle azioni esercitate dalla forza orizzontale

$+ = \frac{mb^2}{M\cdot a^2+b^2}.gmx$ sostituendo in cambio di az il suo valore bx

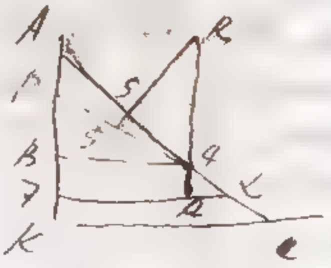


fig. 2

Dissertazione II.

Del Moto d'un Corpo di= scendente lungo un lato retto d'un triangolo materiale privo di gravità, che può cam= minare liberamente per una linea verti cale

Problema III.

orizzontale e si ragguaglia ad una ... n assegnabile della ... quale è la gravità del corpo m. Dunque ... il corpo infinito M, che ... spinto da detta forza orizzontale non può concepire ... moto. Veggasi il Corollario II. del Problema II.

Ho già detto nel preambolo della Dissertazione I. che il Problema sciolto dal Sig.r Bernoulli si può rendere più generale, supponendo che il triangolo ACK si possa muovere per qualunque direzione. Per procedere passo passo dal più semplice al più composto, mi faccio ~~a sciogliere il seguente~~ a considerare l'ipotesi che il triangolo materiale, ma privo di gravità, si possa movere senza patir alcuna resistenza lungo una linea verticale

Problema IV.

Sia ACK (Fig. 3.) un triangolo ~~...~~ materiale, ma privo di gravità, rettan= golo in K il quale si possa liberamente movere, senza patire alcuna resistenza, ~~sempre parallelo~~ e in tutto lungo la linea verticale AQ. Un corpo grave m co= minciando a discendere nel punto A spinga per la retta ~~linea~~ AC il triangolo all'in giù, si dimanda qual linea AmQN relativamente allo spazio immobile verrà descritta dal corpo m.

Fingasi che il corpo m sia giunto nel sito m, e che il triangolo ACK essendo disceso per lo spazio Am occupi il posto 2A2C2K. Dopo ciò continui il mobile m a scorrere lo spazio inassegnabile mQ. Per i punti m, Q si conducano le due linee verticali mQR, QLT, come ancora le due orizzontali mG, QR. Nomino AK=a, KC=b, AB=y, BT=mG=dy, Bm=, GQ=dx, BQ=p, TL=GO=dp, la massa del corpo m=m, quella del triangolo ACK

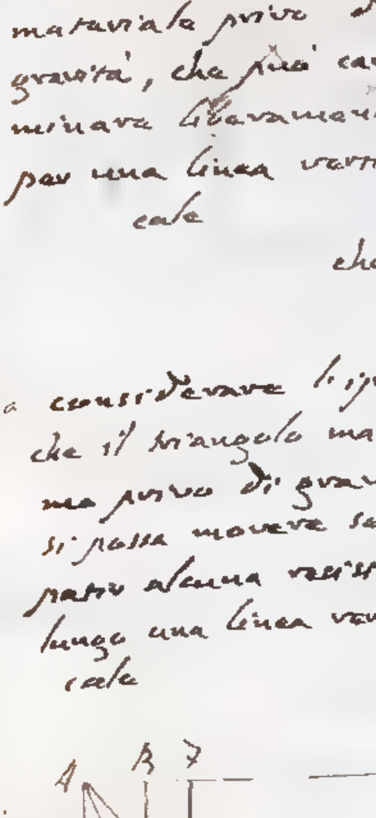


Fig. 3.

Problema IV.

$ACK = M$

La celerità del mobile m per il decorso spazio mD si risolve nelle due, una orizzontale per lo spazietto mG e l'altra verticale per lo spazietto GD. Avverto poi che mentre il corpo m si avanza orizzontalmente per lo spazio $mG = dy$, il triangolo ACK discende per lo spazio $OD = dx - dz$ e che per conseguenza le velocità di essi mobili sono ai medesimi spazj proporzionali. Osservo inoltre che il corpo m scorrerebbe lo spazio mD anche nell'ipotesi, che il triangolo ACK in cambio di discendere per OD rispondesse in pari tempo per la linetta RD. Aggiungo, che in ambo le circostanze il corpo m manterrebbe la stessa velocità, se fosse pari la forza viva del triangolo che cala a basso, o che si muove all'indietro. La ragione è manifestissima, perchè in tutti e due gli incontri si farebbe la stessa distribuzione della azione della gravità del corpo m per lo spazio $Bm = x$, e le medesime porzioni di essa azione si impiegherebbero una ed [illegible] a muover forza viva al corpo m, e l'altra al triangolo ACK. Dovendo le velocità del nostro triangolo, che discende, o che retrocede serbare la ragione di $OD : DR$ sarà essa forza in tutti e due i casi della medesima forza viva, se al triangolo che camminerà all'indietro si assegnerà la massa $\frac{M \cdot \overline{OD}^2}{\overline{DR}^2}$. E vaglia il vero se le due masse M, $\frac{M \cdot \overline{OD}^2}{\overline{DR}^2}$ le moltiplicheremo per le quantità $\overline{OD}^2$, $\overline{DR}^2$

proporzionali

n 70

Problema IV.

proporzionali ai quadrati delle velocità per gli spazj OI, RI ne risulterà la stessa forza cioè $M.\overline{OI}^2$. Or ecco con un giro di metodo ridotta la presente soluzione a quella del Problema I. Una forza media fra le due masse m, $\frac{M.\overline{OI}^2}{\overline{IR}^2}$ spinge in senso contrario la prima per lo spazio mG, e la seconda per lo spazio RI. Avremo adunque per il Problema I

$$m.mG = \frac{M.\overline{OI}^2}{\overline{IR}^2}.RI$$ o sia

$$m.mG = \frac{M.\overline{OI}^2}{IR}.$$ La somiglianza dei triangoli OGm, OIR ci somministra l'analogia

$$OG : Gm :: OI : IR$$
$$dp : dy :: dx-dp : \frac{dx-dp}{dp}$$

Da cui si ricava il valore di $IR = \frac{dx-dp.dy}{dp}$

Sostituito nella scoperta equazione la spezie analitica, prenderà il seguente aspetto

$$m\,dy = \frac{M.\overline{dx-dp}^2.dp}{dx-dp.dy}$$ o pure

$$m\,dy^2 = M.\overline{dx\,dp-dp^2} \quad (I5)$$

In luogo di dp si ponga il suo valore ricavato dalla equazione della triangolo [illegible] AKC le cui coordinate y, p, e ci si presenterà la formola della linea [illegible] cercata AmIN. [illegible] ed in fatti giacchè $\frac{ay}{b} = p$, avremo

$\frac{ay}{b} = p$

[illegible] differenziando $\frac{a\,dy}{b} = dp$. Surrogato in cambio di dp il suo valore avremo, fatte le necessarie operazioni

$$\frac{mb^2+Ma^2.dy}{Mab} = dx,$$ e integrando sarà

senza aggiunta di costante, perchè ad $y=0$ dee corrispondere $x=0$,

$\frac{mb^2+Ma^2}{Mab}\cdot y = x$ (H), formola, che ci addita una parimente retta la linea $AmDN$.

Corollario I.

Posta $a=b$, avremo $\frac{m+M}{M}\cdot y = x$.

Ci dà il Problema I in una formola, quando ~~[illegible]~~ $a=b$. Quindi il grave m percorre la stessa strada AN, e si potrà rimuovere il triangolo rettilineo AKC o rettangolo AKC ~~[illegible]~~ i lati AK, KC siano eguali, orizzontalmente, o pure verticalmente.

Corollario II.

Se avendo le grandezze m, M, a finite supponiamo $KC = b = \infty$, scopriremo $\frac{mb}{Ma}\cdot y = x$; Questa espressione ci annuncia, che a qualunque valore finito di $Am = x$ corrisponde $AB = y$ infinitamente piccolo, o sia adeguatamente nulla, e che per conseguenza il grave m, ed il triangolo ACK discendono unitamente per la verticale AK. E così in fatti deve succedere, imperocchè nel nostro caso il corpo m è appoggiato sopra un piano orizzontale AC, e non può discendere se non cala egualmente abbasso il piano medesimo.

~~Corollario III~~

~~Supponiamo che la linea sia parabola della equazione~~ $\frac{y^2}{2b} = p$. ~~Essendo~~ ~~[illegible]~~

[illegible]

$2\sqrt{by}$

[illegible] (3),

[illegible]

[illegible] $\frac{\ldots y\sqrt{by}}{Ma}$ [illegible] $\frac{\ldots}{2\sqrt{by}}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{\ldots y\sqrt{by}}{3Ma}$ [illegible] $\frac{\ldots}{\sqrt{b}}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

S [illegible] $\frac{\ldots}{11\sqrt{b}}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\ldots y\sqrt{by}}{3Ma}$ [illegible]

[illegible] $\frac{\ldots y\sqrt{by}}{3Ma}$ [illegible]

[illegible] q^3 [illegible] q^2, [illegible]

[illegible] a^2

[illegible]

[illegible] ACdL [illegible]

[illegible] . .

Corollario III

Quando nuovamente per mano la formola generale (12) [illegible], e supposta la massa M del triangolo ACK eguale a nulla, scopro [illegible], [illegible] $y = 0$ [illegible] ad x qualunque valore. Si conchiuda che in tale incontro il grave m discenderà

11) $\frac{mb^2 + Ma^2}{Mab} \cdot y = x$

Scenderà poi la verticale AK, non ve cadendogli veruno impedimento, il triangolo ACK, che si suppone privo di inerzia.

Corollario IV.

Se la massa M si finga infinita, avremo ~~dxxdy~~ $\frac{ay}{b}=x$; supposto ma $\frac{ay}{b}=p$; dunque ~~dxxddy~~, $x=p$. Quindi la retta ~~curva~~ AmDN coincide colla data ACLL, e per questa discende il grave m, restando immobile il triangolo ACK fornito di una inerzia infinita.

Problema V.

Determinare la velocità del grave m, e del triangolo ACK, su cui scorre M.

Ritenute le denominazioni del Problema II, e ripetuto lo stesso raziocinio, si presenterà $gmx = \frac{mu^2+MU^2}{2}$ (6)

Ma passandosi dalle masse m, M gli spazj $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, $dX = dx - dp$ nello stesso minimo tempo, le velocità u, U stanno in ragione dei detti spazj; ~~quella formola~~ (13) $ds^2 =$ ~~M: dx dp:~~ dp^2; dunque ~~conveniente~~ ... il suo valore si ~~semplificherà~~ e l'analogia

Vm: ... $Mdxdp - Mdp^2$ ...

Vm
dic ... ~~...~~

V... $Mdx \cdot dp - Mdp^2$

273

Problema V.

[illegible]

si ponga e posca [illegible] nella formola [illegible] effettuati le necessarie congruenze. Dunque si vedrà l'analogia $\sqrt{dx^2+dy^2} : dx-dp :: u : U$, da cui si ricava $U = \frac{u \cdot dx-dp}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, $u = \frac{U\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx-dp}$. Sostituisco il primo e posca il secondo di tali valori nella formola (a), ed effettuati i necessarj congruenti trovo

$$\frac{\sqrt{2gmx \cdot dx^2+dy^2}}{\sqrt{m \cdot dx^2+dy^2+M \cdot \overline{dx-dp}^2}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2gmx \cdot \overline{dx-dp}^2}}{\sqrt{m \cdot dx^2+dy^2+M \cdot \overline{dx-dp}^2}} = U$$

In luogo di dp pongasi il suo valore espresso per y, che si ricava dalla equazione del triangolo AKC, ed indi in vece della incognita y e sua differenza si collochi quel valore espresso per x, che si deduce dalla equazione proveniente dalla triangolo AKN, e ne proverranno la seguente, dice nuove formole, in cui le velocità u, U delle masse m, M saranno date per lo spazio x a cui s'applica la gravità del corpo in [illegible] per le costanti.

$\frac{ay}{b} = p$

[illegible]

Siccome [illegible] linea retta, e la cui equazione $\frac{a\,dy}{b} = dp$ [illegible]

la

Problema V.

[illegible]

$M\alpha b$

[illegible]

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot mb^2 + Ma^2 + M^2a^2b^2}}{\sqrt{mb^2+Ma^2+M^2a^2b^2+Mmb^4}} - u \quad (12)$$

$$\frac{\sqrt{2gx\cdot m^2b^4}}{\sqrt{mb^2+Ma^2+M^2a^2b^2+Mmb^4}} = U \quad (13)$$

Corollario I.

confrontate queste formole colle analoghe del Problema II. le vedremo uniformi [illegible] Per la qual cosa [illegible] in tale ipotesi. Dice corpi m, M acquistano le stesse velocità o un concetto [illegible] triangolo rettangolo ACK [illegible] con direzione orizzontale o pure con verticale.

Corollario II.

Supposto $KC = b = \infty$, e [illegible] grandezze m, M, a [illegible] i termini del fonro, scopriremo eguali le velocità u, U verificandosi allora $u = U = \frac{\sqrt{2gmx}}{\sqrt{m+M}}$.

Questa conseguenza va di accordo con ciò che ho detto nel Corollario II. del Problema IV.

~~Corollario~~ II

[illegible]

[illegible]

Problema V.

[illegible]

l'equazione differenziale [illegible] = [illegible]

[illegible] l'integrale [illegible] ,

[illegible] formola [illegible]

il valore di [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\sqrt{[illegible]}$

$\sqrt{[illegible]}$

$\sqrt{[illegible]} = [illegible]$

$\sqrt{[illegible]}$

[illegible] della [illegible]

della [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

3 Ma [illegible]

$y = \sqrt[3]{[illegible]} \pm \sqrt{[illegible]} +$

[illegible formula]

Corollario III.

Torno a riassumere le formole (12) (13) esprimenti le velocità u, U dei corpi m, M, e noto che in due casi si trova $u = \sqrt{2gx}$ cioè a dire quando la massa del M del triangolo ACK o si eguaglia a nulla o all' infinito. [illegible]

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $= \ldots$ [illegible]

$\sqrt{2g \ldots}$ [illegible] $=$

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

-277

Problema V.

~~Illegible~~

Le ipotesi di $M=0$ richiede [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \sqrt{2gx} = U$. e quindi

nel caso di $M=0$, [illegible] il triangolo ACK privo di moto, discenderebbe per la linea del piombo con pari velocità $= \sqrt{2gx}$

Corollario IV.

Supponendo $M=\infty$, [illegible]

[illegible]

[illegible]

ne risulterà

$\frac{m b \sqrt{2gx}}{Ma\sqrt{a^2+b^2}} = U$ o sia

$\frac{m b^2}{M^2 a^2 (a^2+b^2)} \cdot 2mx = \frac{M U^2}{2}$

[illegible] Avvertasi in [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $=0$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible] ACK C.
Nella [illegible]
quae [illegible] $= \frac{MAA}{2}$; [illegible]
$m\,dx\,dy$; [illegible]
[illegible] ; $M\,dx + dy =$
$\frac{m\,dy\ldots dx\ldots dy}{dy}$; [illegible]

[illegible] $= \frac{AKL}{2}$

Questa formola ci fa vedere, che quando nella ipotesi di $M = \infty$ [illegible] una porzione inapprezzabile della gravità [illegible] $\frac{2mb^2}{Ma^2 \cdot c^2 + b^2} \cdot gmx$ della gravità del corpo m si spende a cagionar [illegible] nel triangolo ACK, e che perciò tutta la [illegible] si impiega a generare la forza viva nella massa [illegible] M.

Problema VI.

Determinare le forze, che direttamente spingono i corpi m, M per gli spazj [illegible] OT.

Nominate queste forze f, ϕ, avremo per le note formole

$$\int f \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{mu^2}{2}$$

$$\int \phi \cdot dx - dp = \frac{MLL}{2}$$

In cambio di u, U pongo le equivalenti grandezze suggeriteci dalle equazioni (12), (13), onde si abbia

Problema VI.

$S f \sqrt{dx^2 + dy^2} =$ [illegible] $= \dfrac{gmx \cdot \overline{mb^2 + Ma^2 + M^2a^2b^2}}{mb^2 + Ma^2 + M^2a^2b^2 + Mmb^4}$

$S\, \varphi \cdot \overline{dx - dp} =$ [illegible] $= \dfrac{gmx \cdot Mmb^4 \ldots}{mb^2 + Ma^2 + M^2a^2b^2 + Mmb^4}$

[illegible]

[illegible]

$S f \sqrt{dx^2 + dy^2} =$ [illegible]

$S \varphi$ [illegible]

[illegible] (14)

[illegible] (15)

Se in cambio di dp si porrà il suo valore espresso per y e $\frac{ay}{b} = p$ dal triangolo AKC [illegible], dalla equazione [illegible] ed indi in luogo di y [illegible] si sostituiranno le equivalenti quantità espresse per x, e dx e per le quantità note, che si ricavano dalla trovata equazione [illegible], verranno le forze f, φ [illegible] da due funzioni [illegible] e dalle quantità note, cioè

$x\, \dfrac{mb^2 + Ma^2}{Mab} \cdot y = x$
dal triangolo AKN

[illegible]

[illegible]

Problema VI.

[illegible]

la [illegible] che [illegible]

Moto

Effettuate [illegible]

$$f = \frac{gm\sqrt{m^2b^4 + M^2a^4 + M^2a^2b^2}}{(m+M)b^2 + Ma^2} \quad (14.)$$

$$\varphi = \frac{gmMb^2}{(m+M)b^2 + Ma^2} \quad (15.)$$

I due valori costanti delle forze f, φ chiaramente dimostrano, che le accelerazioni dei due corpi m, M si farebbero colla legge dei gravi cadenti.

Corollario I.

Ponendo al confronto le presenti formole colle corrispondenti del Problema III. le troveremo totalmente conformi quando $a = b$. Quindi i mobili m, M nella detta ipotesi sono direttamente [illegible]. Dalle stesse forze f, φ a poco il triangolo ~~[illegible]~~ ACK movendo orizzontalmente, o pure verticalmente.

Corollario II

Se il piano AC fosse orizzontale, ed due ~~seguirebbe~~ richieda $KC = b = \infty$, e mentre le quantità m, M, a non loro passassero i confini del finito, si troverebbe $f = \frac{gm[\ldots]}{m+M}$, $\varphi = \frac{gmM}{m+M}$.

In tal caso le forze f, φ, che si applicano allo stesso spazio x, e che imprimono ai corpi m, M pari velocità devono serbare come realmente succede la ragione delle masse m, M.

~~Corollario III~~

Su che [illegible] della [illegible] riparazione

Problema VI.

[illegible] la [illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] e si [illegible]

[illegible] nella formola [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Nelle altre due formole [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Corollario III.

Considero nuovamente le formole generali (14), (15), [illegible] i valori delle forze [illegible], e ponendomi sotto gli occhi la [illegible]

Problema VI.

... forma considerata $f = \frac{\ldots}{\sqrt{dx^2+dy^2} \ldots}$ $R:8\,y =$

ottiene, che supponendo il triangolo ACK privo di massa, o sia $M=0$, ... $\frac{gm\sqrt{mb^2 \cdot Ma^2 + Ma^2 b^2}}{m+M \cdot b^2 + Ma^2}$

... ad ... Corollario III del Problema IV.

... $f = \frac{\ldots}{dx} = gm$

cioè la forza f, che spinge direttamente il corpo m, eguale al peso del detto corpo, il quale in fatti nel nostro caso discenderebbe senza alcun impedimento per la linea del piombo. * Nella stessa supposizione di $M=0$ lavo di... Corollario IV

Se la massa M fosse $= \infty$, ... si troverebbe ... $f = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot gm$

del Problema ...

...

...

...

$\frac{\ldots}{\sqrt{dx^2+dy^2} \ldots}$

...

...

Tale è il valore della forza ..., che spinge il corpo m per la retta ACLC, lungo alla quale il mobile stesso viaggia nella circostanza, che il triangolo ACK sia infinitamente grave. Veggasi il Corollario II del Problema III.

(Nota: Il passo segnato * si aggiunga al Corollario III)

* Nella stessa supposizione di $M=0$ lavo dal ... numeratore della formula (15) $\ref{}$ ... $= \frac{gm\,M\,b^2}{m+M \cdot b^2 + Ma^2}$

$\ldots$

Rif. 13

$1\,M b^2 + M a^2 = 0$ ... vera $\;Z = g M = 0$

Problema VI.

il termini [illegible] e [illegible] ... Tale,
[illegible] le flussioni [illegible] dy, dp,
[illegible] $\frac{\quad}{dx}$ [illegible], vale
a dire la forza Z, che spinge per la linea
del pianeta il triangolo ACK privo di moto;
eguale a nulla.

(Continua il Corollario IV) Nella stessa ipotesi di $M = \infty$, la formola (13)
[illegible] si integra e viene *
[illegible] $\sqrt{[illegible]}$ [illegible]

$$\sqrt{\frac{[illegible]}{M}} = [illegible] \frac{[illegible]\,dy^2}{M\,dx}$$

$$dp = dx - \frac{[illegible]\,dy^2}{M\,dx} \quad [illegible] \quad dx - dp = \frac{[illegible]\,dy^2}{M\,dx}.$$

Sostituito questo valore nella formola (13)
[illegible] calcoli:

$$Z = \frac{[illegible]\,dx}{dqx} \cdot \frac{[illegible]\,x\,dy^4}{dx^4 + dx^2 dy^2}$$

Sia ACK la linea retta, [illegible] $M = \infty$
[illegible]
[illegible]

$*Z = \frac{g m b^2}{a^2 + b^2}$

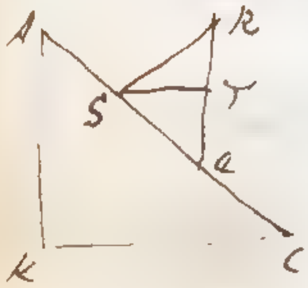


Fig. 4

$Z = [illegible]$. Dal punto C della linea
retta ACC si tiri la verticale $CR = gm$
peso del corpo m. Si faccia RS normale
ad AC, ed ST orizzontale. Si vede
a compiere la linea RT si trovi
$= \frac{g m b^2}{a^2 + b^2} = Z$, e quindi in tal caso
la massa infinita del triangolo ACK e spinta
a basso dalla forza $Z = RT$.

Noto, che quantunque la forza Z non di questo
valore, ciò non ostante la massa infinita
M non si move; perchè questa forza [illegible]
una somma [illegible] di azioni. S'applichi
qui il discorso da me fatto nel Corollario II
del Problema III.

Problema VII

Sia ACK (fig. 5) un triangolo ~~rettilineo~~ materiale, ma privo di gravità, il quale si possa liberamente muovere, senza provare alcuna resistenza, sempre parallelo a se stesso lungo il piano DH inclinato all'orizzonte: Un corpo grave m cominciando a discendere nel punto A per la retta ~~...~~ AQLC spinga il triangolo all'in dietro: si dimanda qual linea AmIN relativamente allo spazio immobile verrà descritta dal corpo m.

Il mentovato corpo sia giunto nel sito m, ed essendo il triangolo ACK trascorso per lo spazio Am si ritrovi nel medesimo istante nella posizione 2A2L2C2K. Seguiti poscia il corpo m a scorrere lo spazietto inassegnabile mI. Per i punti m, I si conducano le due linee BmQ, 7IL parallele ad HD, e si tiri inoltre la verticale mG. Dal punto C parta la retta CR normale ad AK, e per i punti O, I si seguino parallele a CR le linee OS, TIR, l'ultima delle quali viene intersecata nel punto P dalla verticale OP. Chiamo AK = a, KC = b, QK = c, AB = x, B7 = mG = dx, Bm = y, GI = dy, BQ = z, GO = dz, la massa del mobile m = m, quella del triangolo ACK = M.

Passando similitudine fra i triangoli KCQ, GOS, OIP, si verificano le analogie

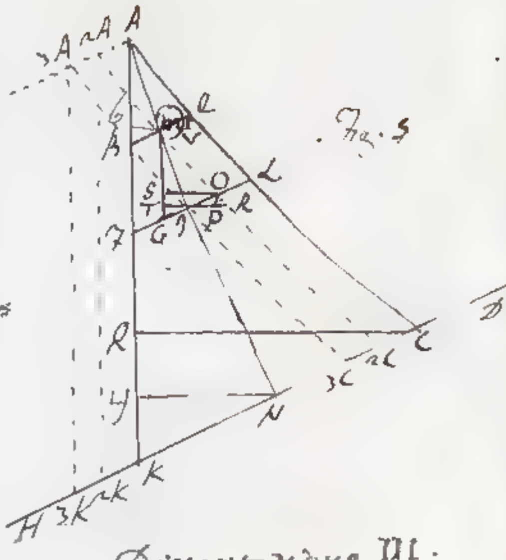
$$KC : QK :: GO : SG$$

$$b : c :: dz : \frac{c\,dz}{b}$$

$$KC : CQ :: OI : IP$$

$$b : \sqrt{b^2-c^2} :: dz-dy : \frac{(dz-dy)\sqrt{b^2-c^2}}{b}$$

le quali



Dissertazione III.

Del Moto di un Corpo discendente lungo un lato retto d'un Triangolo materiale privo di gravità, che può camminare liberamente sopra un piano inclinato all'orizzonte.

Continuando l'intrapreso cammino, prendo a maneggiare l'ipotesi, che il triangolo materiale, ma non grave possa muoversi, senza incontrare alcuna resistenza, lungo un piano inclinato all'orizzonte.

le quali denominiamo $SG = \frac{cdz}{b}$, e $\partial P = \frac{dz - dy\sqrt{b^2-c^2}}{b}$. Giacchè $SG = \frac{cdz}{b}$, sarà

$$mS = mG - SG = dx - \frac{cdz}{b} = \frac{bdx - cdz}{b}.$$

Si osservino a coppia a coppia simili i triangoli mSO, OPR; GOS, $O\partial P$, e dalle due analogie

$$mS : SO :: OP : PR$$
$$SO : SG :: \partial P : OP$$

si ricavi la terza

$$mS : SG :: \partial P : PR,$$

e componendo,

$$mS : mS + SG = mG :: \partial P : \partial P + PR = \partial R,$$

e sostituendo le spezie analitiche,

$$\frac{bdx - cdz}{b} : dx :: \frac{dz - dy\sqrt{b^2-c^2}}{b} : \partial R,$$

analogia, da cui si deduce

$$\partial R = \frac{dxdz - dxdy\sqrt{b^2-c^2}}{bdx - cdz}$$

La somiglianza dei triangoli KCQ, $G\partial T$ si communicherà col mezzo della analogia

$$KC : CQ :: G\partial : \partial T$$
$$b : \sqrt{b^2-c^2} :: dy : \frac{dy\sqrt{b^2-c^2}}{b}$$

il valore della linetta $\partial T = \frac{dy\sqrt{b^2-c^2}}{b}$.

La velocità del corpo m per lo spazietto $m\partial$ risolvesi nelle due, una orizzontale per lo spazio elementare $T\partial = \frac{dy\sqrt{b^2-c^2}}{b}$, e l'altra verticale per lo spazio mT. Facciasi la riflessione, che mentre il corpo m procedisce orizzontalmente per lo spazio $T\partial$, il triangolo ACK viene spinto all'indietro

per lo

per lo spazio OΩ, e che conseguentemente
i mentovati spazj si scorrono con velo-
cità ad essi proporzionali. Conforme
a quanto ho spiegato nel Problema IV.
io potrò sostituire, mentre che punto si
trovi il moto del corpo m, la massa

$$\frac{M\cdot\overline{O\Omega}^2}{\overline{R\Omega}^2} = \frac{M\cdot\overline{dz-dy}^2\cdot\overline{bdx-cdz}^2}{dx^2\cdot\overline{dz-dy}^2\cdot\overline{b^2-c^2}} =$$

$$\frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}^2}{dx^2\cdot\overline{b^2-c^2}}$$ in luogo della M,

e supporre, che essa massa proceda
per lo spazio orizzontale RΩ con velo-
cità allo stesso spazio proporzionale.
Con tale artifizio il nostro Problema
si riduce al primo; e dalla nota
proprietà di una forza media, che
spinge con direzioni opposte il corpo
m per lo spazio $T\Omega = \frac{dy\sqrt{b^2-c^2}}{b}$

ed il corpo $\frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}^2}{dx^2\cdot\overline{b^2-c^2}}$ per lo spazio

$R\Omega = \frac{dx\cdot\overline{dz-dy}\sqrt{b^2-c^2}}{bdx-cdz}$ saremo gui-
dati alla equazione

$$\frac{m\,dy\sqrt{b^2-c^2}}{b} = \frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}^2}{dx^2\cdot\overline{b^2-c^2}}\cdot\frac{dx\cdot\overline{dz-dy}\sqrt{b^2-c^2}}{bdx-cdz} =$$

$$\frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}\cdot\overline{dz-dy}}{dx\sqrt{b^2-c^2}}$$. Questa formola

si riduce alla seguente

$$\frac{m\cdot\overline{b^2-c^2}}{b} + \frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}}{dx}\cdot dy = \frac{M\cdot\overline{bdx-cdz}}{dx}\cdot dz \quad (\ldots)$$

~~Problema VI.~~

Problema VII.

In cambio di dz si metta il suo valore, che si ricava dalla equazione della ~~[illegible]~~ triangolare AKC, le di cui coordinate x, z e si affaccerà la formola ~~[illegible]~~ che determina la linea AmDN della quale ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Dalla equazione $\frac{bx}{a} = z$ si prendano ~~[illegible]~~ le differenze $\frac{bdx}{a} = dz$. Sostituisco in vece di dz il suo valore, e ridotto il calcolo trovo

$$\frac{ma\,\overline{b^2-c^2} + Mb\cdot\overline{ab-cb}\cdot a\,dy}{Mb^2\cdot\overline{ab-cb}} = dx,$$

e integrando senza aggiungere costante, perchè nel punto A sono nulle le incognite x, y eguali a nulla,

$$\frac{ma\cdot\overline{b^2-c^2} + Mb\cdot\overline{ab-cb}\cdot ay}{Mb^2\cdot\overline{ab-cb}} = x \quad (18.)$$

formola, che ci addita essere perfettamente retta la linea AmDN.

~~Tralascio qui alcune conseguenze, che [illegible] dalla formola generale, e [illegible] [illegible] [illegible].~~

Suppongasi, che il punto A cavalletto [?] coincida col punto C, vale a dire che sia $a-c = 0$. In tale ipotesi troveremo $\frac{ma\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot ay}{0} = x$, formola da cui si ricava, che a qualunque valore di x corrisponde sempre $y = 0$. ~~[illegible]~~ Perciò il grave si discenderà per la verticale AK. Il Sig.r Giovanni Bernoulli ha sciolto nel luogo sopra citato questo Problema, e da suoi principj viene condotto

condotto alla medesima conseguenza. Si noti, che essendo orizzontale il piano QC su cui sta appoggiato il corpo m, e prescindendosi da qualunque resistenza di sfregamento il detto corpo m non può concepire altro moto, che per la linea del piombo di niun mezzo; onde il mobile m potesse acquistare velocità per la direzione CQ, sarebbe la frizione che ci fosse stando appoggiato al piano QC; ma questa si suppone trascurabile; dunque allora inassegnabile è la menzionata velocità. Ho stimato necessario il toccar questo punto per togliere di mezzo gli equivoci.

Corollario II.

Se il punto K stasse di mezzo fra i due punti Q, A come nella fig. 6, sarebbe di uopo il cangiare il segno alla linea QK = c; imperciocché nel nostro incontro non è AQ = AK − KQ = a − c conforme abbiamo trovato relativamente alla fig. 5, ma bensì AQ = AK + KQ = a + c.

Per la qual cosa si ci presenterà la formula

$$\frac{ma \cdot \overline{b^2 - c^2} + Mb \cdot \overline{ab + cb} \cdot ay}{Mb^2 \cdot \overline{ab + cb}} = x$$

Fig. 6

Corollario III.

Dato che il punto K si unisca col punto A, onde sia AK = a = 0, in tal caso la direzione per cui si può muovere il corpo M è la linea AC. Ponendo a = 0 l'ultima formola prende il seguente aspetto $\frac{0 \cdot y}{0} = x$, e si mostra a dito, che assegnato ad y qualsivoglia valore, è sempre x = 0. Giacché AB = x = 0 (fig. 6), il punto B coincide col punto A, e dovendo condursi Bm = y, parallela

a

~~Problema VI.~~

Problema VII.

a KC, o sia ad AC nel presente incontro, egli è chiaro, che le bm = y saranno in la linea AC, per cui discende il mobile m. Nella ipotesi di cui parliamo il corpo M non può promuoversi, perchè è premuto da una forza normale alla direzione AC, per la quale non facilmente può comunicare.

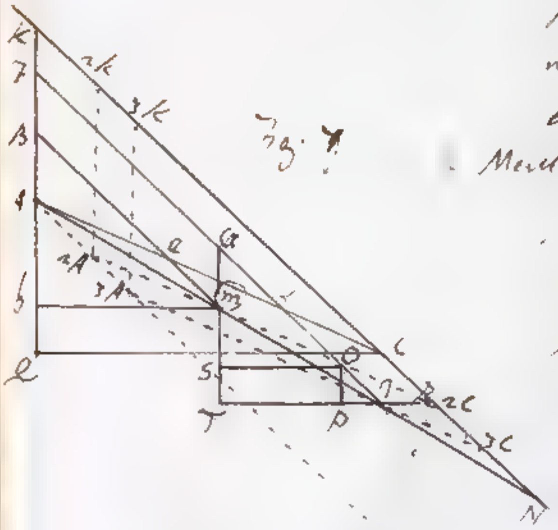


Fig. 7

Corollario IV. Mentre il punto K ascende al di sopra del punto A, è di uopo concepire, che lungo la linea AC (Fig. 7, 8, 9) sia scavato un canale, per cui possa muoversi liberissimamente il corpo m, che col suo peso faccia discendere il triangolo ACK privo di gravità per la direzione KC. Nella circostanza, di cui parliamo non si verifica, come nella Fig. 6 adattata al Coroll. II, che sia AQ = AK + KQ = a + c, ma bensì AQ = KQ − KA = c − a, e perciò nella formola del citato Corollario bisogna mutare il segno alla specie a. Dobbiamo inoltre distinguere tre casi, che nascono da [illegible] necessariamente considerati nei tre seguenti numeri, potendo darsi, che la strada AQ per cui cammina il corpo m relativamente allo spazio immobile o converga inferiormente come nella Fig. 7 colla linea KC, per la quale discende il triangolo ACK, o sia a questa linea parallela come nella Fig. 8, o finalmente con la stessa superiormente s'unisca, come nella Fig. 9

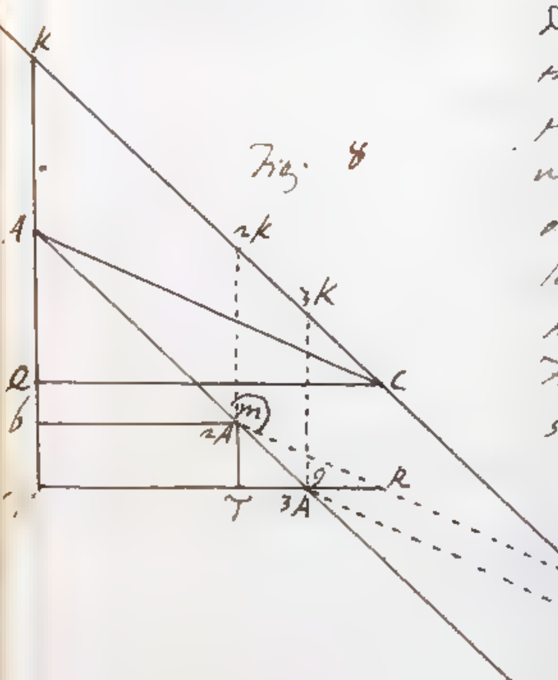


Fig. 8

Corollario V. Se le linee AQ, KC si tagliano inferiormente conforme la Fig. 7 dimostra, ella è cosa chiara, che le AB = x cadono al di sopra di A, e non al di sotto, come nelle precedenti figure. Quindi nella equazione del Coroll.° 2 va mutato il segno non solo alla specie a, ma ancora alla specie x, quindi si abbia

$$\frac{Mb\cdot\overline{cb-ab} - ma\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot ay}{Mb^2\cdot\overline{cb-ab}} = x$$

la

le quali alterazioni fanno sì, che la linea $AK = a$, $AB = x$, fossero alla seconda comparissero in figura di positive. Sicco[?] se tanto che la grandezza $Mb . \overline{cb - ab}$ è maggiore della altra $ma . \overline{b^2 - c^2}$, le $AB = x$ saranno positive, e le linee AI, KC si incontreranno come nella fig. 7.

Ho sempre supposto, che nel principio del moto mentre il triangolo ACK si trova nel posto $A\beta K$, il corpo si sia situato in A. Ora nella presente circostanza trasportasi che sia il triangolo nella posizione $\alpha A \gamma C \alpha K$, il corpo m è giunto in m, e conseguentemente ha viaggiato da A verso C lungo il canale AC, e ha $\alpha A \alpha C$ per lo spazio $\alpha A m$. Quindi si vede che per la divisione del canale il corpo m si muove più celeremente del triangolo ACK.

Corollario VI.

Supponendo $Mb . \overline{cb - ab} = ma . \overline{b^2 - c^2}$ onde sia la quantità $Mb . \overline{cb - ab} - ma . \overline{b^2 - c^2} = 0$, la nostra formula prenderà il seguente aspetto

$$\frac{0 . ay}{Mb^2 . \overline{cb - ab}} = x,$$

e ci insegnerà essere sempre $x = 0$, ascritto ad y qualunque valore. Adunque tutte (fig. 8) le ascisse x saranno concentrate nel punto A, ed avremo, per la generale costruzione, a condurre le ordinate parallele a KC, si dovranno queste prendere nella linea AI equidistante relativamente a KC,

e

e la predetta AI sarà la strada per cui in riguardo allo spazio immobile il corpo si camminerà. Dalla considerazione della Fig. 8 ne deduco, che il mobile ne stia sempre fisso nel punto A, o sia nA, rA del canale nAC, e che insieme col triangolo ACK viaggi per la stessa direzione AI con pari velocità. In fatti se il corpo si movesse lungo il canale AC non potrebbe discendere per la linea AI parallela a KC conforme la supposizione fatta al principio di questo Corollario necessariamente richiede. Sembrerebbe a prima vista cui ripugnasse la proposizione, potersi dare il caso, che il corpo grave si collocato dentro un canale inclinato all'orizzonte, senza potere verun ostacolo non muova passo per discendere lungo il canale medesimo. Le avvertenze fatte ci illumineranno, che in tutto il mobile [illegible] non abbandona il punto A in quanto che tutti i due camminano colla stessa velocità.

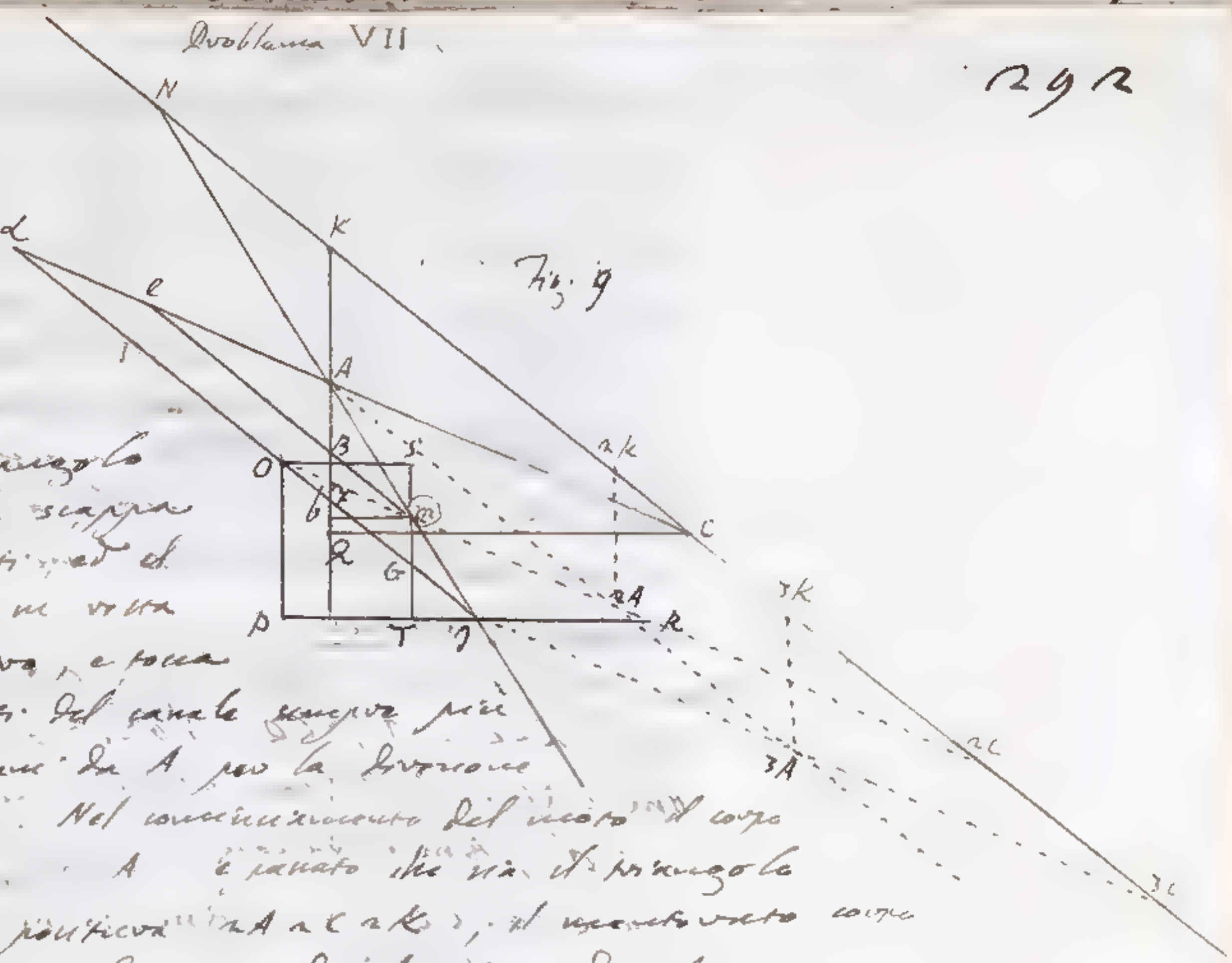
Corollario VII.

Resta da esaminarsi l'ipotesi, che sia $Mb.\overline{cb-ab}$ minore di $ma.\overline{b^2-c^2}$, la quale porterà, che divenendo negativo il valore delle ascisse

$$AA = x = \frac{Mb.\overline{cb-ab} - ma.\overline{b^2-c^2}.ay}{Mb^2.\overline{cb-ab}}$$

vadano alla sinistra da A verso Q come nella Fig. 9. La nostra costruzione delle x negative va necessariamente connessa coll'altra, che la linea AI, KC divergano inferiormente, e convergano superiormente come sta espresso nella Fig. 9. Il [illegible] che abbiamo per le mani, richiede che la velocità del triangolo ACK per la direzione del canale AC superi quella del corpo [illegible] per la medesima direzione. [illegible]

il



il triangolo ACK scappa sempre ed il corpo m retta indietro, e tocca punti del canale sempre più lontani da A per la direzione AL. Nel cominciamento del moto il corpo m ... A è passato che sia il triangolo alla posizione 2A 2C 2K, il secondo vertice corpo m si è discostato da A; o sia da 2A per il tratto 2Am

Se posto AQ = KQ − KA = c − a = 0, si troverà $-x = ma \cdot \overline{b^2 - c^2} \cdot ay$.

Questa formola è ridotta a $\overset{0}{\ }$; dunque qualunque valore di x corrisponde sempre $y = 0$. Quindi la linea Am coinciderebbe colla AQ, ed il corpo m discenderebbe per la linea del piombo, non altrimenti che nel caso di nessun piano concedente.

Corollario VIII.

Essendo (Fig. 5) $QK = c = 0$, cioè a dire sovrapponendosi la linea CK alla orizzontale CQ, si troverà a comparire invece l'equazione del Corol. 1 del Problema I

$\overline{m + M} \cdot ay = x$.

MG Corollario IX.

Se essendo di misura finita la linea QC =

~~Problema VI~~

Problema VII

$QC = \sqrt{b^2-c^2}$, si suppongano infine, ed adeguatamente eguali le linee $CK = b$, $QK = c$, la mentovata linea CK, lungo alla quale è concesso di moversi il corpo M, diverrà verticale a norma della ipotesi considerata nel Problema IV. Per ridurre adunque l'equazione ~~debita~~ registrata al principio del primo ~~corollario~~ Problema a quella ~~debita~~ ~~trovata~~ del Problema IV ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, mi giovo del sottoposto artifizio

Meno la linea mb parallela a CQ, e chiamo $AQ = a-c = A$, $CQ = \sqrt{b^2-c^2} = B$, $Ab = x$, $bm = y$. Dalla somiglianza dei triangoli KCQ, Bmb raccolgo

$$KC : CQ :: Bm : mb$$
$$b : \sqrt{b^2-c^2} :: y : Y$$

$$CQ : KQ :: bm : Bb$$
$$\sqrt{b^2-c^2} : c :: Y : \frac{cY}{\sqrt{b^2-c^2}}$$

analogie, che mi somministrano l'equazioni

$$y = \frac{bY}{\sqrt{b^2-c^2}}, \quad Bb = \frac{cY}{\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Osservo essere $AB = x = X + \frac{cY}{\sqrt{b^2-c^2}}$;

laonde sostituendo nella mentovata equazione scoperta sul principio di questo ~~corollario~~ Problema in vece di y, e di x i valori determinati, mi si presenta

$$\frac{ma.\overline{b^2-c^2} + Mb.\overline{ab-cb}}{Mb^2.\overline{ab-cb}} \cdot \frac{acY}{\sqrt{b^2-c^2}} = X + \frac{cY}{\sqrt{b^2-c^2}}$$

ora

$$\frac{\sqrt{b^2-c^2}\,.\,ma^2cY}{Mb^2.\overline{ab-cb}} + \frac{\overline{a-b}\,.\,cY}{b\sqrt{b^2-c^2}} = X$$

Vengo

~~Problema X:~~

Problema VII.

Vengo ora alla ipotesi di $AC = \sqrt{b^2-c^2} = B$ finita di $AQ = a-c = A$ finita, e c di $CK = b$, $QK = c$ infinita. Si osservi che i quadrati di queste due ultime linee differiscano per la grandezza finita $\overline{AC}^2 = b^2-c^2 = B^2$; ma non così le linee stesse, la cui differenza consiste in una quantità infinitamente piccola, la quale io trascuro in confronto. $\frac{a-b \cdot cy}{b\sqrt{b^2-c^2}}$, ponendo $a-c$ in cambio di $a-b$ onde si abbia

$$\frac{\sqrt{b^2-c^2} \cdot ma^2cy}{Mb^2\,\overline{ab-cb}} + \frac{\overline{a-c} \cdot cy}{b\sqrt{b^2-c^2}} = x.$$

Sostituiscasi B in vece di $\sqrt{b^2-c^2}$, A, in vece di $a-c$, e si avrà

$$\frac{mBa^2cy}{MAb^3} + \frac{Acy}{Bb} = x :$$

ma $\frac{a^2c}{b^3}$, e $\frac{c}{b}$ si eguagliano adequatamente alla unità; dunque riducendo allo stesso denominatore $\frac{mB^2 + MA^2y}{MAB} = x$, ch'è la equazione del Problema IV. adattata ~~[illegible]~~ retta.

~~Corollario III~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] $\frac{b^2}{b}$ [illegible]~~

~~[illegible]~~ BQ

243

295

Problema VII.

[illegible]

[illegible] ... $\sqrt{6}$ [illegible]

[illegible] $\frac{bx}{c}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{bdx}{c}$ [illegible] $\sqrt{\ldots}$

[illegible] dx [illegible] $\sqrt{\ldots}$

[illegible] valore nella generale [illegible]

[illegible]

[illegible] $= \frac{[illegible]}{\sqrt{[illegible]}} \cdot \frac{bdx}{c}$ [illegible]

formola differenziale della curva [illegible]

[illegible] $\sqrt{6}$.

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{bdx}{c}$ [illegible] $\frac{bdz}{c}$ [illegible] $\sqrt{\ldots}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{bdx}{c}$

Problema X

Problema VII.

[illegible]

[illegible] quanto [illegible] nella [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $= \frac{[illegible]}{a^2}$,

[illegible] $= \frac{ab[illegible]}{a^2}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Problema I.

[illegible]

[illegible] AQ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Problema IV [illegible]

[illegible]

Problema AQ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] onde si abbia

[illegible]

[illegible] nella equazione della [illegible]

[illegible] la parabola [illegible]

[illegible]

[illegible]

297

Problema VII

[illegible]

[illegible]

$$ = \frac{MA^2 B b^2 dx - MA^2 b^2 c dy}{B c \ldots} ,$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] Corollario IX.

Considero di nuovo la formola generale

$$ \frac{m c b^2 \ldots dx}{dx} \ldots $$

e facendo la massa M del triangolo ACK eguale a nulla, ne risulterà $m a b^2 - c^2 \cdot y dy = dx$, e però $y = 0$,

$ma \cdot b^2 c^2 + Mb \cdot ab - cb \cdot ay$

$Mag^2 \cdot ab - cb$

attribuito

Problema VII.

attribuito ad x qualsivoglia valore. In tal caso adunque il grave m, che non resta punto impedito dal triangolo ACK privo di materia discende per la verticale AK.

Corollario XI.

Se la massa M suppongasi infinita, si ricava dall'equazione condizione, che rimanendo il triangolo infinitamente inerte ACK il corpo m anche in riguardo allo spazio immobile cala a basso per la retta ACKC.

$\frac{ay}{b} = x$

Problema VIII

Determinare le velocità del grave m e del triangolo ACK (fig. 5) privo di gravità, la cui massa M.

Ritengo la denominazione del Problema II, e noto, che quando il corpo m è giunto in m, la sua gravità ha esercitata azione per lo spazio $Ab = x - \frac{cy}{b}$. Avremo pertanto

$$gmx - \frac{gmcy}{b} = \frac{muu + MUU}{2} \quad (17).$$

Le velocità u, U delle masse m, M stanno come gli spazi mI, OI, che si scorrono nello stesso tempuscolo, ed essendo $mI = \sqrt{mT^2 + TI^2} =$

$$\sqrt{\overline{dx - \frac{cdy}{b}}^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2} dy^2} = \sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2}$$

$OI = dz = dy$, avremo l'analogia

$$\sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2} : dz = dy :: u : U,$$

che

Problema VIII

299

che mi dà $U = \dfrac{u \cdot \overline{dz - dy}}{\sqrt{dz^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b} + dy^2}}$

$u = \dfrac{U\sqrt{dx^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b} + dy^2}}{dz - dy}$. Sostituisco

prima l'uno, e poscia l'altro di questi valori nella formola (?), e ridotto il calcolo mi si affaccia

$$\frac{\sqrt{2gmx - \frac{2gmcy}{b} \cdot \overline{dx^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b} + dy^2}}}{\sqrt{m \cdot \overline{dx^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b} + dy^2} + M \cdot \overline{dz - dy}^2}} = u \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{2gmx - \frac{2gmcy}{b} \cdot \overline{dz - dy}^2}}{\sqrt{m \cdot \overline{dx^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b} + dy^2} + M \cdot \overline{dz - dy}^2}} = U \quad (21)$$

Ma ora di dz si ponga il suo valore dato per y, che si deduce dalla conosciuta equazione del triangolo AKC, e così in luogo della variabile y e sue differenze si mettano i loro valori espressi per x, che si ricavano dalla già scoperta formola del triangolo AmKN, e ne risulteranno due nuove equazioni ne li quali le velocità u, U delle masse m, M verranno conseguentemente per la sola incognita x, e per le costanti

~~[illegible]~~

Poichè abbiamo $\frac{bx}{a} = z$, ..

$$\frac{Mb^2 \cdot \overline{ab-cb} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mab \cdot \overline{ab-cb}} = y \text{ . effettuate}$$

le suvvogazioni testè prescritte, scopriremo, ponendo per maggior brevità

$$\frac{Mb^2 \cdot \overline{ab-cb} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mab \cdot \overline{ab-cb}} = \frac{hx}{k} = y$$

$$\frac{\sqrt{2gma^2x \cdot \overline{bk-ch} \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2}}}{\sqrt{ma^2bk \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2} + Mb^2k \cdot \overline{bk-ah}^2}} = u \quad (18)$$

$$\frac{\sqrt{2gmx \cdot \overline{bk-ch} \cdot \overline{bk-ah}^2}}{\sqrt{ma^2k \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2} + Mbk \cdot \overline{bk-ah}^2}} = U \quad (19)$$

Corollario I

Se il punto A si unisse col punto Q, si avrebbe $AQ = AK - KQ = a - c = 0$, e conseguentemente $h = 0$, $k = ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2}$.
In tale ipotesi adunque si troverebbe

$$\frac{\sqrt{2gma^2x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = u, \quad \frac{\sqrt{2gmb^2x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = U.$$

I valori di queste velocità si accordano con quelli, che nel luogo anteriormente citato determina il Sig. Giovanni Bernoulli.

Corollario II.

Stia il punto K fra mezzo i due Q, A (Fig. 8), e valeranno le formole sopra, purchè si metta

$$\frac{h}{k} = \frac{Mb^2 \cdot \overline{ab+cb}}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mab \cdot \overline{ab+cb}}$$, e si muti il segno alla lettera c.

Corollario III.

Mentre il punto K coincida col punto A, onde abbiasi $AK = a = 0$, o per levare ogni equivoco infinitamente piccola

prendasi per tal caso secondo [illegible] che ho detto nel Corollario II. del Problema VII, ci si presenterà la equazione

$$\frac{Mb^2\cdot\overline{ab+cb}\cdot x}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab\cdot\overline{ab+cb}} = y,$$

e cancellato il termine incomparabile $ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}$, e facendo la divisione per $Mb\cdot\overline{ab+cb}$; $\frac{bx}{a}=\frac{hx}{k}=y$

Nelle formole delle velocità, cangiato il segno alla specie c, si ponga $\frac{ay}{b}$ in cambio di x, b in vece di h, a in vece di k, e troverassi

$$\frac{\sqrt{2gma^3y\cdot\overline{ab+cb}\cdot\overline{a^2b+2abc+b^3}}}{\sqrt{ma^3b^2\cdot\overline{a^2b+2abc+b^3}+Ma^3b^2\cdot 0}} = \frac{\sqrt{2gc^2y}}{\sqrt{b}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2gmay\cdot\overline{ab+cb}\cdot a^2\cdot 0}}{\sqrt{ma^3b\cdot\overline{a^2b+2abc+b^3}+Ma^3b^2\cdot 0}} = 0 = U$$

conforme (giusto) a quanto ho stabilito dover succedere nel Corollario III. del Problema VII [illegible]. I valori scoperti delle velocità u, U resteranno gli stessi anche quando si eguagli a nulla la massa M del triangolo ACK; perchè la linea $AK=a$ sia assolutamente eguale a nulla. Conciossiachè il vero sovrapponendosi in detto incontro la linea CK alla CA, il corpo M soffre una pressione normale e nulla direzione CA, o una normale CK, per la quale certamente può muoversi, nè essendovi ragione che necessariamente verso, piuttosto da C verso A, che da A verso C, dovrà conservare in quiete per quanto si [illegible] la sua massa. Se dunque ed [illegible] $a=0$ corrispondo $U=0$ qualunque sia la grandezza della massa M, ne segue, che

che non si ritroverà né pure il valore della velocità $u = \frac{\sqrt{2gcy}}{\sqrt{b}}$ del corpo m. Non chi legga, essere $\frac{cy}{b}$ lo spazio..., per cui il grave in questo caso ha esercitata l'azione, la quale tutta si impiega ad imprimere forza viva nel mentovato corpo, restando come abbiamo provato immobile la massa M.

La stessa verità si può dimostrare per altra strada. Si ammonisce la fig. 6, che quando il punto K sia inferiore al punto A, di modo che la linea AK = a faccia figura di positiva, si verifica sempre essere GO = dz maggiore di GI = dy, onde resti positivo il valore di IO = dz - dy. Qualora poi il punto K ascenda al di sopra del punto A, in modo che la linea AK = a sorta l'aspetto di negativa, come nella fig. 7, diviene GO = dz minore di GI = dy, e quindi si scopre negativo il valore della linea IO = dz - dy. Ella è facile da cavarsi la conseguenza, che posta AK = a = 0 sarà parimente IO = dz - dy = 0, e ciò indipendentemente da qualunque valore della massa M. Ma le velocità u, U dei corpi m, M stanno in ragione delle linee mI, OI, e nel caso di cui parliamo mI = dy, OI = dz - dy = 0, dunque U = 0, come si dovea dimostrare.

Avverto, che quando AK = a è positiva (fig. 6) il corpo M si muove da C verso K, ed al contrario quando AK = a è negativa (fig. 7) il mobile M camminerà da K verso C. Supposta adunque AK = a = 0 il detto corpo non correrà né a destra né

: BvB .

Problema VIII

né a sinistra, ma in qualunque punto di messa mezzana, o anche nulla, converrà la sua quidde.

Corollario IV.

Se a norma della Fig. 7 saranno negative le linee $ck = c$, $AK = a$, $AB = x$, nella formola della velocità u, che dànno alla fig.a 5, e da cui scoperto il principio di questo ~~corollario~~ Problema dovesi cangiare il segno non solo alle dette linee, ma ancora alla linea h, onde si abbia

$$\frac{\sqrt{2gma^2x}\cdot\overline{ch-bk}\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}}{\sqrt{ma^2bx\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mb^2k\cdot\overline{bk-ah}^2}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2gMx}\cdot\overline{ch-bk}\cdot\overline{bk-ah}^2}{\sqrt{ma^2x\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mbk\cdot\overline{bk-ah}^2}} = U$$

Si scoprirà la ragione della mutazione di segno alla specie h., ove si paragonino insieme le due equazioni proprie delle fig.re 5.ta e 7.ma, le quali equazioni esprimono la relazione tra le coordinate x, y.

equazione conveniente alla fig. 5.a

$$\frac{Mb^2\cdot\overline{ab-cb}\cdot x}{Mab\cdot\overline{ab-cb}+ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}} = \frac{h}{k}x = y$$

equazione conveniente alla fig. 7.a

$$\frac{Mb^2\cdot\overline{cb-ab}\cdot x}{Mab\cdot\overline{cb-ab}-ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}} = \frac{-Mb^2\cdot\overline{ab-cb}\cdot -x}{Mab\cdot\overline{ab-cb}+ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}} = \frac{-h}{k}\cdot -x = y$$

L'ultima equazione si salva, quando ~~si faccia negativo ancora~~ il segno della ~~incognita x, che~~ quello della costante h. unitamente col segno della incognita x si faccia negativo anche quello della costante h.

La

Problema VIII
Corollario V.

304

La fig. 7 richiede che sia $Mab.\overline{cb-ab}$ maggiore di $ma^2.\overline{b^2-c^2}$: che se queste due quantità saranno eguali come suppone la fig. 8, avremo

$Mab.\overline{ab-cb}+ma^2.\overline{b^2-c^2}=K=0$

Il mentovato Corollario VI del Problema VII ci insegna, che a $K=0$ corrisponde $x=$. Nelle formole del mentovato Corollario IV, che esprimono le velocità u, U, si ponga primieramente in vece di $\frac{hx}{K}$ il suo valore $\frac{y}{h}$, e cancellati poscia i termini eguali a nulla, ed espurgate le formole si troverà

$\frac{\sqrt{2gm.\frac{cy}{0}}}{\sqrt{m+M}}=u=U$, cioè

e dire eguali le velocità u, U dei corpi m, M conformemente a ciò, che io avverto nel stato medesimo del Corollario VI del Problema VII.

Passo alla considerazione del caso rappresentato dalla fig. 9, che accetta la seguente equazione

$$\frac{Mb^2.\overline{cb-ab}.x}{Mab.\overline{cb-ab}-ma^2.\overline{b^2-c^2}}=\frac{Mb^2.\overline{ab-cb}.x}{Mab.\overline{ab-cb}+ma^2.\overline{b^2-c^2}}=\frac{hx}{K}=y$$

Per adattare le formole delle velocità u, U proprie della fig. 5 alla presente ipotesi non si deve modificare il segno della variabile x, perchè sa ambi gli incontri va presa da A verso R. Quindi i segni delle costanti h, K o si devono lasciare intatti o modificare ambedue. Io mi appiglio al

Problema VIII.

al primo partito, e vero solo nelle mentovate formole i segni delle costanti a, c, onde si avrà

$$\frac{\sqrt{2gma^2x}\cdot\overline{bk+ch}\cdot\overline{bk^2+2chk+bh^2}}{\sqrt{ma^2bk\cdot\overline{bk^2+2chk+bh^2}+Mb^2k\cdot\overline{bk+ah}^2}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2gmx}\cdot\overline{bk+ch}\cdot\overline{bk+ah}^2}{\sqrt{ma^2k\cdot\overline{bk^2+2chk+bh^2}+Mbk\cdot\overline{bk+ah}^2}} = U$$

Supponendo, che il punto A (fig. 9) coincida col punto B, di modo che sia AK = BK, o analiticamente a = c, ne risulterà h = 0, k = $ma^2 \cdot b^2-c^2$. Adempiuta questa condizione, ed eseguita la formole ci si presenterà

$$\frac{\sqrt{2gmx\cdot a^2}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = u, \quad \frac{\sqrt{2gmx\cdot b^2}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = U$$

Queste formole si conformano perfettamente con quelle del Corollº I. In tutti e due i casi il corpo m discende per la linea verticale. Nel primo caso si applica a punti differenti della linea AC da A verso C, di modo che quando (fig. 5) il triangolo ACK ha scorso lo spazio CK = b, il mobile m tocca il punto C della linea AC. Tutto all'opposto nel secondo incontro il corpo m (fig. 9) si adatta a varj punti della linea o canale AC dà A verso L in guisa tale, che passato dal triangolo ACK lo spazio KC = b, la massa m tocca il punto L del canale [illegible] distante da A per la linea LA = AC

Corollario VII.

Ripiglio la considerazione delle formole generali 14. 19. radicaliquadrate, che in riguardo ai segni sono adattate alla Fig. 5,

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\sqrt{\ldots}$ [illegible]

D'osservo, che posta eguale a nulla la massa M del triangolo ACK, si trova $\sqrt{2g.\overline{x-\frac{cy}{b}}} = u$. Quando $x-\frac{cy}{b}=AB$ lo spazio, a cui si applica la gravità del corpo m, chiaramente si scopre, che la velocità u è quella, che corrisponde alla totale azione della gravità, nessuna parte della quale si impiega ad imprimere forza viva alla massa nulla M.

Che se M non fosse assolutamente = 0, ma infinitamente piccola, si potrebbe dar qualche caso, in cui il valore di u fosse minore del ritrovato. Sia AbKcb (Fig. 6) [illegible] ed AK = a infinitamente piccola. Fingasi M ugualmente più piccola di a, e che stabisca con a^2 una proporzione finita, di modo che sia per esempio

$M = \frac{ma^2.\overline{b^2-c^2}}{b^2.\overline{ab+cb}}$, e fatta la sostituzione nella formola $\frac{Mb^2.\overline{ab+cb}.x}{ma^2.\overline{b^2-c^2}+Mab.\overline{ab+cb}} = y$

adattata alla presente ipotesi, si troverà $x=y$. Queste determinazioni mi danno, avvertendo di cangiare il segno

307

Problema VIII.

il segno nelle formole 18, e 19 alla linea c

$$\frac{\sqrt{[illegible]}}{\sqrt{[illegible]}} = \sqrt{2g\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}\cdot\frac{2c}{b+c}} = \sqrt{\frac{4gcx}{b}} = u$$

$$\frac{\sqrt{[illegible]}}{\sqrt{[illegible]}} = \frac{\sqrt{2g\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}\cdot b^2c}}{\sqrt{a^2\cdot\overline{b+c}^2}} = \frac{\sqrt{2gb^2cx}}{\sqrt{a^2\cdot b+c}} = U$$

Nel caso, di cui trattiamo, della intera azione della gravità $gm\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}$ se ne spende la sola parte $gm\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}\cdot\frac{2c}{b+c}$ a produrre forza viva nel corpo m, impiegandosi il rimanente $gm\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}\cdot\frac{b-c}{b+c}$ a cagionar forza viva nella massa M, che camminerà colla velocità U infinitamente maggiore di u.

E qui non voglio lasciar passare sotto silenzio una specie di paradosso. Abbiamo veduto, che posta AK = a infinitamente piccola, e la massa M in data ragione con a^2, si spende una considerabile porzione della azione $gm\cdot\overline{x+\frac{cx}{b}}$ del peso gm a cagionare forza viva nel corpo M. Ora che direbbe il Lettore, se ritenendo la condizione di a, e di M inassegnabili, e restituendo due contrarie ipotesi di una di M infinitamente maggiore di a^2, di altra di M infinitamente minore, mostrassi in amendue una conseguenza diversa da quella per me dedotta, quando M è proporzionale ad a^2, se trovassi, che in tutte e due le circostanze l'azione intera della gravità del corpo m si impiega

a produr

Problema VIII

si produce forza viva nel detto urto?

Pongasi in primo luogo e ragione di esempio $M = \frac{ma \cdot \overline{b^2-c^2}}{b \cdot \overline{ab+cb}}$, e si troverà

$\frac{ax}{ca} = y$, $u = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}} \cdot \overline{1 - a \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2c}}} = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}}}$

$\frac{mu^2}{2} = gm \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}} \cdot \overline{1-a \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2c}}$,

$U = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}} \cdot \overline{\frac{a+c}{c}}} = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}}}$

$\frac{MU^2}{2} = gm \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}} \cdot \frac{a \cdot \overline{b^2-c^2}}{b^2c}$.

Ci insegnano le precedenti formole, essere la forza viva $\frac{mu^2}{2}$ acquistata dal mobile m adequatamente eguale alla totale azione $gm \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}}$ del suo peso opposta gm: e che alla ~~dilicontro~~ opposta, forza viva $\frac{MU^2}{2}$, onde è fornita la massa M, pareggia una parte menoma della azione $gm \cdot \overline{x+\frac{cx}{2a}} \cdot \frac{a \cdot \overline{b^2-c^2}}{b^2c}$.

Metto in secondo luogo $M = \frac{ma^3 \cdot \overline{b^2-c^2}}{b^3 \cdot \overline{ab+cb}}$

e trovo $y = \frac{abx}{a^2+b^2}$ e ne adequatamente

$y = \frac{ax}{b}$, $u = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}} \cdot \overline{1-a \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2c}}} = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}}}$

$\frac{mu^2}{2} = gm \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}} \cdot \overline{1-a \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2c}} = gm \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}}$

$U = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}} \cdot \frac{b^2 \cdot \overline{a+c}}{a^2c}} = \sqrt{2g \cdot \overline{x+\frac{acx}{b^2}} \cdot \frac{b^2}{a^2}}$

$\frac{MU^2}{2} =$

309

* supposto che in ambe le ricorrenze il peso gm si applichi ad un pari spazio AG

Problema VIII

$\frac{MU^2}{2} = gm \cdot \frac{x + axc}{6a} \cdot \frac{a \cdot 6a^2 c a^2}{6ac}$ ... Ovvero

dai legge essere i valori delle forze vive $\frac{mu^2}{2}$, $\frac{MU^2}{2}$ eguali a quelli della ipotesi antecedente, *

Ora ecco interamente svelato il vero... Nel caso intermezzo il semiquadrato della $\frac{U^2}{2}$ della velocità del mobile M, che è infinitamente grande del grado $\frac{1}{a^2}$ un moltiplicato per la massa M infinitamente piccola del grado a^2; e ne viene la forza viva ~~un prodotto~~ finita MU^2, atta a produrre da quale si richiede una data porzione della azione del peso gm, che si suppone finita. Nel caso intermezzo in primo luogo considerato, ritenendo sempre l'ipotesi che sia finito lo spazio AG, pel quale agisca la pressione (il peso gm), la metà del quadrato $\frac{U^2}{2}$ della velocità del corpo M ha un valore finito, e moltiplicandola per la massa M infinitesima del grado a, ne proviene una forza viva ~~grandezza~~ MU^2 infinitesima del mentovato grado a, per cui genera non ~~altro~~ si ricava, salvo che una parte inassegnabile della azione gm. AG. Finalmente nel caso, del quale in terzo luogo ho fatto parola il semiquadrato $\frac{U^2}{2}$ infinitamente grande del grado $\frac{1}{a^2}$ moltiplicato nella massa M infinitamente piccola

piccola del grado 3° cominciando
la forza viva $\frac{MU^2}{2}$ infinitesima
del grado 2°, che si eguaglia ad
una menoma porzione della ascesa
$gm \cdot Ab$.

Dalle cose dette in questo Corollario, e nel precedente si raccoglie, che la velocità U del triangolo ABC, la cui massa M sia o nulla, o incomparabile, può eguagliarsi ad una grandezza o nulla, o menoma, o finita, o infinita.

Abbiamo altrove veduto, che la forza viva del ingrandito corpo M può raggiungere una quantità o nulla, o menoma, o finita della ascesa del peso gm. Aggiungo ora, che generalmente dandosi tre casi, nei quali essa forza viva si trova adeguatamente eguale a tutta l'ascesa della gravità della massa m.

Sia ABC una linea retta (fig. [illegible]), e la cui aggiunzione [illegible] ad U, punto A (fig. 9.) si unisca col punto B, onde sia $x = z$.
In tal ipotesi impariamo dal nuovo Corollario VI, che le velocità u, U hanno come a in b, e che in conseguenza le forze vive $\frac{mu^2}{2}$, $\frac{MU^2}{2}$ avranno la ragione di $ma^2 : Mb^2$. Supponiamo a minima, ed $m : M$ [illegible], ne risulterà $\frac{mu^2}{2} : \frac{MU^2}{2}$ [illegible].

Quest'ultima analogia ci ammonisce che quando la forza viva della massa finita m è paragonabile relativamente a quella della massa minima M, l'ascesa $gm \cdot Ab$ si impiega adeguatamente

Problema VIII

311

namente tutta a ragionar forza viva nel triangolo ACK benchè di inadeguabile niuna fornito.

Corollario VIII.

Mi volto alla supposizione di $M = \infty$ [illegible] ed avverto, che qualunque volta sia [illegible] $ddx\,dy = 0$ (fig. 5), o pure la detta grandezza abbia un valore talmente meschino, che il prodotto $Mc\,ddx\,dy$ si possa negligere relativamente all'altro [illegible] dx [illegible] dy [illegible]; si troverà sempre $u = \sqrt{2g\,.\,\overline{x - \frac{cy}{b}}}$ [illegible], e la totale azione [illegible] $\overline{x - \frac{cy}{b}}$ del peso gm corrisponderà ad imprimere forza viva alla [illegible]; di modo che il corpo $M = \infty$ o starà in quiete, o camminerà con una velocità colla piccola, che la sua forza viva $\frac{Mu^2}{2}$ si potrà riguardare assolutamente evanescente. Da [illegible] $bk - ah = 0$ si deduce $ddx\,dy$ $bk = ah$*

Sostituendo [illegible] nella formola (H) [illegible]

$\frac{mcb^2\,cc^2}{b}$ [illegible] $\frac{Mc\,bddx\,cdz}{dx}$ [illegible] $\frac{Mc\,bddx\,cdz}{dx}$

espressione, che non si può salvare, se non nella circostanza, che la grandezza $ma\,\overline{b^2 - c^2}$ sia o assolutamente eguale a nulla, o almeno relativamente tale posta a confronto colle altre $\frac{Mc\,bddx\,cdz}{dx}$. $Mb^2\,\overline{a - c}$.

Sia [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\frac{Mc\,bddx\,cdz}{dx}$ [illegible] $\frac{Mc\,[illegible]}{a}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

Supponendo

$bk - ah$

$Mbk\,.\,\overline{bk - ah}$

$ma^2k\,.\,\overline{bk^2 - ahk + bh^2}$, si

* si sostituisca in cambio di k, [illegible] il loro valore

$ma^2b\,.\,\overline{b^2 - c^2} + Mab^2\,.\,\overline{ab - cb} = Mab^2\,.\,\overline{ab - cb}$, e dividendo per ab, $ma\,.\,\overline{b^2 - c^2} + Mb^2\,.\,\overline{a - c} = Mb^2\,.\,\overline{a - c}$, espressione ec.

* Riguardando [illegible] $\frac{[illegible]}{b}$ [illegible] $\frac{Mc\,[illegible]}{a}$ [illegible] [illegible]

Problema VIII

311

~~a quel termine corrispondo di $Mb^2\,\overline{a-c}$.~~
Supponendo finita la massa m, in due casi il termine $ma.\,b^2-c^2$ può agguagliarsi al nulla assoluto, mentre cioè sia $QC = \sqrt{b^2-c^2} = o$, o pure $AK = a = o$. Nella prima circostanza la linea, o piano AC, a cui sta appoggiato il grave m, diviene verticale, e non soffrirà pressione alcuna. Ora nascendo dalla pressione che esercita il corpo AC, il moto del corpo M, cesserà questo in una perfettissima quiete. Lo stesso addiviene quando $AK = a = o$, conforme ho dimostrato nel motivo del Corollario III. Nei due casi; considerati cioè sempre $U = o$ assolutamente qualunque valore o numerico, o finito o infinito abbia la massa M, e l'azione tutta que: $\overline{x.-cy}$ del peso qui si impiegherà a cagionar forza viva nel corpo m.

Che se la grandezza $ma.\,b^2-c^2$ non sarà rigorosamente eguale a nulla, ma potrà considerarsi tale relativamente ad $Mb^2.\,\overline{a-c}$, allora il corpo M si moverà, ma così lentamente, che la sua forza viva $\frac{MU^2}{2}$ sarà trascurabile in riguardo a quella del corpo m, per cui generarsi si spenderà adequatamente l'azione del tutto peso qui. Si contenti il Lettore di due esempj. Le linee $AK = a$, $QC \cdot \sqrt{b^2-c^2}$, $KC = b$, $AQ = a-c$ siano tutte finite, e crederà, che a motivo di $M = \infty$, la quantità finita $ma.\,b^2-c^2$ possa negligersi messa a confronto della infinita $Mb^2\,\overline{a-c}$.
~~Lunghezza infinitamente, ma crescere rimarchevole~~
~~straordinario~~

313

Problema VIII.

~~mancrisca ...~~ ~~...~~ Pongasi $QK = c = 0$, onde le due quantità da paragonarsi insieme prendono il seguente aspetto mab^2; Mab^2, ~~egli è chiaro, che qualunque valore si assegni attribuisce~~ ~~ar...~~, che posso o per procedere con tutto rigore mb; Mb, levando la moltiplicazione per ab effettuata nell'atto di sciogliere il Problema VII. ~~vicendevolmente~~. Egli è chiaro, che qualunque lunghezza, purché non eguale a nulla si assegni alla linea $KC = b$, sarà nullo per il primo termine nello in riguardo il secondo nella ipotesi di $M = \infty$. Quando $QK = c = 0$, si sovrappongono l'una all'altra le due linee $KC = b$ $QC = \sqrt{b^2 - c^2}$: Quindi nella ipotesi non ha molto fatto di $QC = 0$ si compiendo quella di $b = 0$, mentre si verifichi l'altra ossia $c = 0$; Se adunque saranno nulle le linee $QK = c$, $KC = b$, il corpo M si muoverà per una quantità assoluta

Nei casi, nei quali è osservabile la forza viva MU^2 del corpo inferiore M, faccio ritorno ai Precedenti oggetti, ne' cui essa forza viva pareggia adequatamente l'ascesa $gm \cdot \overline{x - cy}$ del peso gm. Dato che sia $gm \cdot \frac{x - cy}{b} = MU^2$, ne segue, che nell'equazione (*9) * il termine

$*\sqrt{2gmx \cdot bk - ch \cdot bk - ah^2} = U$

$\sqrt{ma^2 \cdot bk^2 - achk + bh^2 + Mbk \cdot bk - ah}$

$$\frac{\sqrt{\cdot agm \cdot x \ldots}}{\sqrt{m \cdot dx^2 \ldots dy \ldots dy^2 \ldots}}$$

$ma^2 \cdot bk^2 - achk + bh^2$ il denominatore $dx^2 - \frac{2acdxdy}{b} + dy^2$ debba essere

Problema X:

Problema VIII.

essere per adequazione $= 0$ [illegible] al paragone coll' altro [illegible] $Mbk \cdot \overline{bk - ah}^2$. Cancellato [illegible] esso termine $= 0$, ne risulta

$$\sqrt{2gmx} \cdot \frac{bk - ch}{Mbk} = u$$

e per conseguenza

$$gm \cdot \overline{x - \frac{chx}{bk}} = \frac{Mu^2}{2}$$

e giacchè $\frac{hx}{k} = y$,

$$gm \cdot \overline{x - \frac{cy}{b}} = \frac{Mu^2}{2},$$

cioè a dire la forza viva dal corpo M eguale alla forza [illegible] creata dal peso gm.

[illegible] la [illegible] $\frac{[illegible]}{b}$ [illegible] [illegible] potrebbe [illegible] [illegible] formola [illegible] il valore di [illegible]

[illegible]

$$\frac{[illegible]}{b} \cdot [illegible]$$

[illegible]

[illegible] delle [illegible] e che il secondo termine [illegible] sarà [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] che il prodotto [illegible] [illegible], $dy = 0$, $dx = \frac{[illegible]}{c}$, [illegible]

[illegible]

$M [illegible] = Mb^2 dx^2$.

Supponendo [illegible] sarà [illegible] in quanto

315

Problema VIII

incognito ad [illegible] alla linea b, per cui [illegible] [illegible] valori, che viene a [illegible] alla [illegible], che la grandezza $M \cdot b\,dx\,ddx$ [illegible] nella [illegible] altra in $\frac{b\,dx\,ddx}{6}$

Non può [illegible] la formola $\frac{b\,dx}{c}$ [illegible] nelle [illegible], [illegible] per esempio sia $AK = a$ = $QK = c$. Dal Corollario I. si ricava essere in tal circostanza

$$\frac{\sqrt{2gma^2x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = u \;,\; \frac{\sqrt{2gmb^2x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = U$$

e conseguentemente

$$\frac{gmx \cdot ma^2}{ma^2+Mb^2} = \frac{mu^2}{2} \;,\; \frac{gmx \cdot Mb^2}{ma^2+Mb^2} = \frac{MU^2}{2}$$

Le due velocità u, U stanno come $a : b$, ed a supponendosi $M = \infty$ sono ambedue infinitesime. In oltre la forza viva MU^2 del corpo M s'adegua alla intera azione gmx del peso gm, essendo trascurabile nel denominatore la grandezza ma^2 posta al paragone della Mb^2. Il caso ora [illegible] è puramente geometrico. Ridiscendendo in un tempo infinito perché il peso gm esercitasse una azione finita, i due corpi m, M riceverebbero una forza finita

quest. ... le due quantità $\frac{ma\,dx^2 + \ldots}{6}$, * $M\,ddx\,dy^2$ si corrispondono in proporzione finita, ambi i corpi m, M acquistano una forza

*ma^2k $bk^2 - 2chk + bh^2$,
$Mbk \cdot bk - ah$

Problema X:

Problema VIII

316

una forza viva computabile. Sia nel modo di esempio $ma\,dx^2 + 2a\,dx\,dy + c\,dy^2$ [illegible] $= ma^2k \cdot bk^2 - 2chk + bh^2 =$ $Mbk \cdot bk - ah^2$, e si troverà

$\frac{\sqrt{gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}}}}{\sqrt{m}} = u$, $\frac{\sqrt{gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}}}}{\sqrt{M}} = U$

$\frac{1}{2}gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}} = mu^2$, $\frac{1}{2}gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}} = MU^2$

Si vede adunque $gm\,\overline{x-\frac{cy}{b}}$ della forza viva del corpo m si dividerà in due parti eguali, che importeranno pari misure di forza viva nelle due masse m finita M infinita; quando le due velocità u finita, U infinitesima abbracceranno la ragione inversa di quadrata delle masse stesse; ed il moversi con velocità infinitesima la massa infinita M costerà la metà della azione. Si vede la importantissima conseguenza, che comunemente dicesi in Meccanica, ed è lo scuotimento delle macchine, nel quale si consuma inutilmente non poca azione, che rendendo la macchina immobile si spenderebbe nell'effetto, e cui li Ingegneri han indirizzata la nuova Regola della ~~Conchiudendo colla riflessione~~ detta, che posta infinita la massa M del triangolo ACK si ponno dare dei casi, nei quali la metà azione dell'urto gm si trasfonda nell'altro corpo m, M, o nell'uno, o nell'altro corpo m, M, o pure si divida in qualsivoglia proporzione fra le due masse

317

Problema IX.

Determinare le forze che direttamente spingono i corpi m, M (fig. 5) per gli spazj MA, OZ.

Nomino ~~dunque~~ cinque il solito con f, F, ed essendo $MA = \sqrt{dx^2 + dy^2 - 2dx \cdot \frac{cdy}{b}}$, $OZ = dz - dy$, le conosciute formole ci somministrano le espressioni

$$\int f \sqrt{dx^2 + dy^2 - \frac{2c\,dx\,dy}{b}} = \frac{mu^2}{2},$$

$$\int F \cdot \overline{dz - dy} = \frac{MU^2}{2}.$$

In vece di u, U sostituisco i loro valori a norma delle equazioni ~~[illegible]~~ 16, e 19, e in vece di dy, dz i valori somministrati dalle equazioni $\frac{bdx}{a} = dz$

[illegible]

[illegible] differenziando

[illegible]

[illegible]

[illegible] (ae3)

[illegible]

[illegible]

Problema X.

~~Problema IX.~~

~~...~~

Sia ... (struck-out passage)

ovvero $\frac{Mb^2 \cdot \overline{ab-cb} \cdot dx}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mab \cdot \overline{ab-cb}} = \frac{hdx}{k} = dy$, e

Adempiute le convenienti operazioni sulle formole (A), (B), (C), trovo mi si presenta

$$f = gm \cdot \frac{\overline{mbk-mch}\sqrt{k^2-\frac{2chk}{b}+h^2}}{mb \cdot \overline{k^2-\frac{2chk}{b}+h^2} + Mb \cdot \overline{\frac{bk}{a}-h}^2} \quad (20.)$$

$$F = gm \cdot \frac{\overline{Mbk-Mch} \cdot \overline{\frac{bk}{a}-h}}{mb \cdot \overline{k^2-\frac{2chk}{b}+h^2} + Mb \cdot \overline{\frac{bk}{a}-h}^2} \quad (21.)$$

I due valori costanti della forza f, F ci mostrano a dito, che le accelerazioni delle due masse m, M si effettuerebbe colle leggi dei gravi cadenti. I detti valori sono adattati alla fig. 5. Si accomodaranno con utilità alle figure 6, 7, 8, 9 fatta la debita mutazione nei segni dell'or alcune quantità.

Corollario I.

Posta la massa $M=0$, nel qual caso, non il Corollario XII del Problema VII è parimente $Bm = y = 0$, e per conseguenza, la formola 20 prende il seguente aspetto $f = gm$. Di fatti in tale incontro tutto il peso del corpo m si impiega a stimolare al moto esso corpo.

Nella

359

Problema IX.

Nella medesima ipotesi di $M = \infty$ si scopre nella formola n. 3. $f = o$; non abbisognando forza alcuna per imprimere moto in una massa, che è nulla si eguaglia ... Corollario II nella formola n. a sia ...

$\sqrt{dx^2 + ... dy^2}$

la forza f, che spinge direttamente il corpo per la direzione AN pure che deve eguale alla forza in ... tangenziale $gm . \frac{AY}{AN}$ nascente dalla risoluzione del peso del nominato corpo. L'azione della predetta forza, che si applica allo stesso AN, si eguaglia alla totale azione della gravità $gm . AY$, e quindi impiegandosi tutta essa azione nell'imprimere forza viva al corpo m, egli è chiaro, che l'altra massa M deve immobile rimanere. Rimane dunque da vedersi, quando sia

$$Mb . \frac{bk}{a} - h^2 = o$$

a cui nella ipotesi ... $M = \infty$. La formola ... $m ... + M . bdx ...$

$M . ... dx ... = ... M . bdx ...$

dx

$dy ... M . ... = m . \frac{...}{b} ... + M bdx ...$

per avere, ridotta che sia il comune,

$M . ddy^2 = ... m dx ... \frac{b...dy}{b}$

$\frac{... + M . c bdx ...}{b}$

è ... che mancano di uguaglianza nell'ipotesi di $M = \infty$, perché non sia $cbdx = cdz = o$ ...

$M b . \frac{bk}{a} - h^2 = o$, ... avremo $f = gm . \frac{bk - ch}{b \sqrt{k^2 - \frac{2chk}{b} + h^2}}$

Poiché $AK : KN :: k : h$, ed $AK = a$, ne risulta KN; condotta KY parallela a CB, ... $KQ = c$ ... $:: KN = \frac{ah}{k} : KY$; dunque $KY = \frac{ach}{bk}$, e perciò $AY = a - \frac{ach}{bk} = a . \frac{bk - ch}{bk}$. Inoltre $YN = \sqrt{KN^2 - KY^2} = \sqrt{\frac{a^2h^2}{k^2} - \frac{a^2c^2h^2}{b^2k^2}} = \frac{ah\sqrt{b^2 - c^2}}{bk}$, e finalmente $AN = \sqrt{AY^2 + YN^2} = \sqrt{a^2 . \overline{bk - ch}^2 + a^2h^2 . \overline{b^2 - c^2}} : b^2k^2 = \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - \frac{2chk}{b} + h^2}$. Se tutta il ... gm s'impiega ad animare la massa m la forza ... Ora tale è il valore della forza f, posto $Mb . \frac{bk}{a} - h = o$ essendo $gm . \frac{AY}{AN}$.

* Avremo per tutto, ridotto al comune, $M . ddy^2 = ... M . ... \frac{b ... }{b}$

$m dx . \frac{b^2 c^2}{b} + M . bdx ...$

$gm . \frac{bk - ch}{\sqrt{k^2 - 2chk + h^2}} = f$.

$\frac{11}{11}$ ... $Mb . \frac{bk}{a} - h$ ... paragonato il resto, o perché $M = o$, o perché $b = KC = o$ ma perché $\frac{bk}{a} - h$.

Problema X:

Problema IX.

[illegible] dx [illegible]

$\sqrt{dx^2 + 2a\,dx\,dy + dy^2}$

[illegible]

Se $b\,dx$ [illegible]

[illegible] AC

[illegible] $AK = a$ [illegible]

[illegible] $M\,dz^2$,

[illegible]

Sostituiti [illegible]

[illegible] $\frac{dx}{}$ [illegible] $\frac{}{m\,dx^2 + M\,dz^2}$

e nella supposizione di $AK = 0$ [illegible]

[illegible] $\frac{}{dx}$ [illegible] $\frac{m\,dx^2}{M\,dz^2}$ [illegible] $dz = \frac{b\,dx}{c}$

[illegible] $\frac{}{dx}$ [illegible] $\frac{c^2 m a\,dx^2}{b^2 M\,dx^2} = \frac{gmc^2}{Mb^2}$,

[illegible]

[illegible] il corpo [illegible]

[illegible] $b\,dx - c\,dz = 0$ [illegible]

[illegible] M, [illegible] $dz\,dy$

[illegible] $\frac{b^2 - q^2}{b}\,dz$ [illegible]

[illegible] dz^2

[illegible] $\frac{}{dz\,dy}$ [illegible] $\frac{M\,dz\,dy^2}{m\,c\,dx^2 + 2a\,dx\,dy + dy^2}$

[illegible] $dz\,dy$ [illegible]

BRC

$\frac{bk}{a} - h = 0$, o sia $bk - ah$.

Il primo caso lo ho considerato nel Corollario I.

Nel secondo caso, che suppone $b = KC = 0$, egli è ~~chiaro~~ manifesto, che coincidendo la linea AC colla AK, il corpo m non riceve alcun impedimento, e tutto il suo peso si impiega ad accelerarlo.

Mi rivolgo dunque al terzo caso di incidenza, ~~ipotesi~~ condizione $bk = ah$.

Sostituiti i valori di k, e di h, troveremo

$ma.\overline{b^2 - c^2} + Mb.\overline{ab - cb} = Mb.\overline{ab - cb}$, equazione che non può verificarsi se non nella ~~circostanza~~ che $ma.\overline{b^2 - c^2}$ sia evanescente rispettivamente ad $Mb.\overline{ab - cb}$. Posto che siano finite le quantità date M, $b = KC$, $a - c = AK$, e per conseguenza anche la quantità $Mb.\overline{ab - cb}$, svanirà il termine $ma.\overline{b^2 - c^2}$ qualora sia o $AK = a = 0$, ovvero $QC = \sqrt{b^2 - c^2} = 0$.

Se $AK = a = 0$, la linea AC si sovrappone alla KC, ed essendo la pressione, che soffre il corpo M, normale alla direzione CK, per cui unicamente può muoversi, dee necessariamente restare in quiete. Che se $QC = \sqrt{b^2 - c^2} = 0$, la linea AC diviene verticale, e niun ostacolo al moto del corpo m, si rifonde in esso tutta la azione del peso gm, e la massa M rimane immobile.

321

Problema IX.

Son dentro i limiti del tutto la quantità $\frac{bk-ah}{a}$ = $mab.\overline{b-c}^2$ ed anco che $Mb^2.\overline{a-c}$ ascenda all' infinito, sarà di uopo che sia immensa la massa M colla condizione però altro che AQ = a − c non sia talmente mini-ma, che renda il pro-dotto $Mb^2.\overline{a-c}$, o finito, o infinitesimo. Supponendo adunque $Mb^2.\overline{a-c}$ = ∞, essendo $kx = \frac{ah}{k}$ [illegible]

$$\frac{Mb^2.\overline{a-c}}{Mb^2.\overline{a-c}+ma.\overline{b-c}^2}$$

$$= b - \frac{mab.\overline{b-c}^2}{Mb^2.\overline{a-c}+ma.\overline{b-c}^2}$$

e quindi KC = b, [illegible]

$$AC = \frac{mab.\overline{b-c}^2}{Mb^2\overline{a-c}+mab.\overline{b-c}^2}$$

infinitamente piccola. nella ipotesi di $Mb^2.\overline{a-c}$ = ∞. [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{b^2xz^2}{b}$ [illegible] $\frac{b^2a^2\,[illegible]}{b}$ [illegible]

[illegible], [illegible]

[illegible] [illegible] bx − cy = b [illegible]

[illegible] eguali [illegible]

[illegible] $\frac{b}{b}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{dx\,dz}$ [illegible]

[illegible]

Questa [illegible] nell'[illegible] [illegible] immobile.

Sintesi. [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{dx}{dz}$ [illegible]

[illegible] Agendo [illegible] per la spinta [illegible] [illegible]

[illegible] VIII [illegible]

Problema VIII.

Se

Se nella formola (21.) collocheremo in luogo di $\frac{bk}{a} - h$ il suo valore $mab.\overline{b^2-c^2}$, ci si presenterà

$$7 = \frac{gm.\overline{Mbk-Mch}.mab.\overline{b^2-c^2}}{mb.\overline{k^2-\frac{2chk}{b}+h^2}+Mb.m^2a^2b^2.\overline{b^2-c^2}^2}$$

essendo nella supposizione di $M = \infty$ $k = \frac{ah}{b}$ adeguatamente, troveremo

$$7 = \frac{gm.\overline{Mah-Mch}.mab.\overline{b^2-c^2}}{mb.\overline{\frac{a^2h^2}{b^2}-\frac{2ach^2}{b^2}+h^2}+Mb.m^2a^2b^2.\overline{b^2-c^2}^2};$$

e perchè $h = Mb^3.\overline{a-c}$, ci accorgeremo essere nel denominatore trascurabile il secondo termine. Per la qual cosa avremo

$$7 = \frac{gma.\overline{b^2-c^2}.Mb^2.\overline{a-c}}{\overline{a^2-2ac+b^2}.h}$$, e sostituito

il valore di $h = Mb^3.\overline{a-c}$,

$$7 = \frac{gma.\overline{b^2-c^2}}{b.\overline{a^2-2ac+b^2}}.$$

Avendo dimostrato, che nel denominatore comune alle due formole (20.), (21.) può negligersi il secondo termine, quando $M = \infty$, scopriremo

$$f = \frac{gm.\overline{mbk-mch}}{mb\sqrt{k^2-\frac{2chk}{b}+h^2}}.$$ Si ponga $k = \frac{ah}{b}$,

e dopo i necessarj calcoli giungeremo alla equazione

$$f = \frac{gm.\overline{a-c}}{\sqrt{a^2-2ac+b^2}}.$$

Applicandosi la forza $7 = \frac{gma.\overline{b^2-c^2}}{b.\overline{a^2-2ac+b^2}}$

allo spazio minimo $NC = \frac{mab.\overline{b^2-c^2}}{Mb^2.\overline{a-c}}$

nel tempo che la forza permanente finita

f

$f = \frac{gm \cdot \overline{a-c}}{\sqrt{a^2 - 2ac + b^2}}$ si applica allo spazio finito AN, il corpo M rimane in una fisica quiete.

Sia $M = \infty$, e di più $AQ = a - c = 0$, onde si abbia $h = Mb^3 . \overline{a-c} = 0$, $k = ma^2 . \overline{b^2 - c^2}$, $KN = \frac{ah}{k} = 0$, $NC = b$, e la formola (20.), (21.) prenderanno la seguente forma $f = gm . \frac{ma^2}{Mb^2}$, $F = gm . \frac{a}{b}$

Agendo la forza F per lo spazio $CK = b$ nel tempo, in cui la forza minima f agisca per lo spazio $QK = a$, l'azione di essa forza F si eguaglierà a $gm . a$, e pareggerà quella della gravità del corpo m, la quale s'impiegherà adequatamente tutta nell'imprimere forza viva alla massa infinita M. Una tal massa frattanto non concepirà salvo che un'infinitesima velocità, e fisicamente non farà moto; sopra di che veggasi quello, che ho detto non lungi dal fine del Corollario VIII. del Problema VIII.

Problema X:

Problema X.:

Problema X

Dissertazione IV.

Del Moto di un Corpo discendente lungo un lato retto di un Triangolo materiale fornito di gravità, che può camminare liberamente sopra un piano inclinato all'orizzonte.

~~Rendo generale la soluzione del Problema,~~ Per trattare generalmente il tema che mi sono proposto, supponendo, che il triangolo inerte e grave possa moversi, senza incontrare veruna resistenza, lungo un piano ~~parallelo~~ inclinato all'orizzonte.

Sia ACK (fig. 5) un triangolo rettilineo materiale fornito di gravità, il quale si possa liberamente movere, senza patire resistenza veruna, sempre parallelo a sè stesso lungo la linea DH inclinata all'orizzonte. Un corpo parimente grave m cominciando a discendere nel punto A per la retta AQLC spinga il triangolo all'indietro: si dimanda qual linea AmIN relativamente allo spazio immobile verrà descritta dal corpo m.

Supposta la preparazione del Problema VII, e le denominazioni quivi usate, sia GM il peso del triangolo ACK, la sua massa M, e mentre esso retrocede per lo spazio $OI = dz - dy$, il suo peso eserciterà l'azione $GM \cdot OP$: ma per la similitudine dei triangoli KCQ, OIP

$$KC : KQ :: OI : OP$$
$$b : c :: dz - dy : \frac{c \cdot (dz - dy)}{b};$$

Dunque $OP = \frac{c \cdot (dz - dy)}{b}$, e conseguentemente $GM \cdot OP = \frac{GMc \cdot (dz - dy)}{b}$.

La sommatoria di questa infinitesima azione sarà $\frac{GMc \cdot (z - y)}{b}$.

Suppongo divisa la massa M del triangolo rettilineo ACK in due parti (m), (M) con sì fatta legge, che movendosi esse colla stessa velocità u della massa M, tutta l'azione $\frac{GMc \cdot (z - y)}{b}$ si impieghi ad imprimere forza viva alla sola porzione (m). Ciò posto in riguardo all'altra parte (M), ed al corpo m, che discende per la retta AQC, egli è lo stesso come se il triangolo ACK non fosse grave. Avremo dunque per il Problema VII.

$$\frac{(M) b^2 \cdot (ab - cb) \cdot x}{m a^2 \cdot (b^2 - c^2) + (M) ab \cdot (ab - cb)} = \frac{hx}{k} = y \quad (B.A.)$$

Determinazione

243

325

Problema VI.

Problema X.

[illegible]

Cerchiamo ora il valore della [illegible] (m) [illegible] eguale [illegible]

[illegible]

[illegible] e quindi [illegible]

$y = \frac{bx}{k}$ [illegible]

$\frac{bx}{a}$ [illegible] $\frac{bx}{k}$

[illegible] $\frac{\ldots}{b}$ [illegible] $\frac{\ldots}{ak}$ [illegible]

(m) [illegible] $\frac{\ldots}{b}$ [illegible] $\frac{\ldots}{ak}$ [illegible]

[illegible] dalla formula (m)

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{\ldots}{b}$ [illegible] $\frac{\ldots}{ak}$ [illegible]

(m) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (m) =

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(m) [illegible]

[illegible]

Dunque

Problema X.

Determiniamo ora i valori delle dette porzioni (m), (M) della massa M: quando il corpo m è pervenuto in m, la sua gravità ha esercitata azione per lo spazio $Ab = AB - Bb = x - \frac{cy}{b}$

~~Nelle esposizioni trasferito il... il triangolo Ack... punto... sito... parallela... di esso triangolo che... esercitata... triangoli... analogia~~

~~$b : c :: ... = \frac{... cy}{b}$~~

Ho già avvertito, che in tale incontro la gravità del triangolo ACK, che si è trasferito nel sito aAzczk, ha esercitata l'azione $\frac{GMc}{b} \cdot \overline{z-y}$. Averemo dunque

Averemo pertanto per la nota formola

$gmx - \frac{gmcy}{b} + \frac{GMcz}{b} - \frac{GMcy}{b} = \frac{mu^2}{2} + \frac{MU^2}{2}$. (23.) Le velocità u, U delle masse m, M stanno come gli spazj mI, OI, che si passano nello stesso tempuscolo, ed essendo mI

$= \sqrt{mT^2 + TI^2} = \sqrt{\overline{dx - \frac{cdy}{b}}^2 + \frac{\overline{b^2 - c^2} \cdot dy^2}{b^2}}$

$= \sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2}$, $OI = dz - dy$, ne risulta l'analogia

$\sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2} : dz - dy :: u : U$,

che ne dà

$$U = \frac{u \cdot \overline{dz - dy}}{\sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2}}$$

$$u = \frac{U\sqrt{dx^2 - \frac{2cdxdy}{b} + dy^2}}{dz - dy}.$$

Sostituisco

Problema X.

Sostituisco, prima l'uno, e poscia l'altro di questi valori nella formola (23) e ridotto il calcolo mi si presenta

$$u = \frac{\sqrt{2gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}}+2\frac{GMc}{b}\cdot\overline{z-y}}\cdot\overline{dx^2-\frac{2c\,dx\,dy}{b}+dy^2}}{\sqrt{m\cdot\overline{dx^2-\frac{2c\,dx}{b}dy+dy^2}+M\cdot\overline{dz-dy}^2}}$$

$$U = \frac{\sqrt{2gm\cdot\overline{x-\frac{cy}{b}}+2\frac{GMc}{b}\cdot\overline{z-y}}\cdot\overline{dz-dy}^2}{\sqrt{m\cdot\overline{dx^2-\frac{2c\,dx}{b}dy+dy^2}+M\cdot\overline{dz-dy}^2}}$$

essendo frattanto $\frac{bx}{a}=z$, $\frac{b\,dx}{a}=dz$, $\frac{hx}{k}=y$, $\frac{h\,dx}{k}=dy$, dalla sostituzione di questi valori ne nasceva dopo la conveniente operazione

$$\frac{\sqrt{2gma^2\cdot\overline{bk-ch}+2GMac\cdot\overline{bk-ah}}\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}\cdot x}{\sqrt{ma^2bk\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mbk\cdot\overline{bk-ah}^2}} = u \quad (24)$$

$$\frac{\sqrt{2gma\cdot\overline{bk-ch}+2GMc\cdot\overline{bk-ah}}\cdot\overline{bk-ah}\cdot x}{\sqrt{ma^2k\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mabk\cdot\overline{bk-ah}^2}} = U \quad (25)$$

Giacchè nella forza viva $(m)\frac{U^2}{2}$ della parte di massa (m) del triangolo ACK si ha da impiegare tutta l'azione del peso GM eguale a $\frac{GMc}{b}\cdot\overline{z-y}$, surrogati in luogo di z, ed y, i loro valori $\frac{bx}{a}$, $\frac{hx}{k}$, scoprivamo $(m)\frac{U^2}{2}=\frac{GMcx}{b}\cdot\frac{bk-ah}{ak}$ e collocando in cambio di $\frac{U^2}{2}$ il suo valore (somministrato dalla

Problema X.

3R8

dalla formola (25) :

$$(m)\cdot gma\cdot\overline{bk-ch}+GMc\cdot\overline{bk-ah}\cdot\overline{bk-ah}^2\cdot x$$

$$ma^3k\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mabk\cdot\overline{bk-ah}^2$$

$$=\frac{GMc}{b}\cdot\frac{\overline{bk-ah}\cdot x}{ak}\quad =a.\ \text{sia}$$

$$(m)=GMc\cdot\frac{ma^2\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mb\cdot\overline{bk-ah}^2}{gmab\cdot\overline{bk-ch}\cdot\overline{bk-ah}+GMbc\cdot\overline{bk-ah}^2}$$

Noto essere

$$bk-ch=ma^2b\cdot\overline{b^2-c^2}+(M)ab^2\cdot\overline{ab-cb}$$

$$-(M)cb^2\cdot\overline{ab-cb}=ma^2b\cdot\overline{b^2-c^2}+(M)b^3\cdot\overline{a-c}^2,$$

$$bk-ah=ma^2b\cdot\overline{b^2-c^2}+(M)ab^3\cdot\overline{ab-cb}$$

$$-(M)ab^2\cdot\overline{ab-cb}=ma^2b\cdot\overline{b^2-c^2}.$$

Sostituisco in vece di $bk-ah$ il suo valore, onde si abbia dividendo per ma^2

$$(m)=GMc\cdot\frac{\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mma^2b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{gmab^2\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{bk-ch}+GMma^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}^2}$$

Pongo nel denominatore in cambio di $bk-ch$ la ritrovata eguale grandezza, e mi si presenta

$$(m)=GMc\cdot\frac{\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mma^2b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{gm^2a^3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2+gm(M)ab^5\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2+GMma^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}^2}$$

Si avverta inoltre essere

$$bk^2=(M)^2a^2b^5\cdot\overline{a-c}^2+2m(M)a^3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}+m^2a^4b\cdot\overline{b^2-c^2}^2,$$

$$-2chk=-2(M)^2ab^5c\cdot\overline{a-c}^2-2m(M)a^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c},$$

$bh^2=(M)^2b^5\cdot\overline{a-c}^2$. Quindi abbiamo

$$(m)=GMc\cdot\frac{(M)^2\cdot\overline{a^2b^4-2ab^4c+b^6}\cdot\overline{a-c}^2+(M)2ma^3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}}{gm^2a^3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2+gm(M)ab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2+GMma^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}^2}$$

$$+GMc\cdot\frac{(M)\cdot-2ma^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}+m^2a^4\cdot\overline{b^2-c^2}^2+Mma^2b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{gm^2a^3b^3\cdot\overline{b^2-c^2}^2+gm(M)ab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2+GMma^2b^3c\cdot\overline{b^2-c^2}^2}$$

ma $M-(M)=(m)$; dunque

329

Problema X

$$(M)^2 \cdot GMc\cdot\overline{a^2b^4 - 2ab^4c + b^6\cdot\overline{a-c}^2} + gmab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2$$

$$+(M)\cdot 2GMma^2b^2c\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2 + GMma^3b^2c\cdot\overline{b^2-c^2}^2$$

$$+ gm^2a^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2 - gmMab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2$$

$$+ Gm^2Ma^4c - gm^2Ma^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2 = 0 \;(26)$$

Faccio

$$\alpha = GMc\cdot\overline{a^2b^4 - 2ab^4c + b^6} + gmab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2,$$

$$2e = GMc\cdot\overline{2ma^2b^2\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c} + ma^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2}$$

$$- gmMab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2 + gm^2a^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2,$$

$$-N = Gm^2Ma^4c - gm^2Ma^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2.$$

Sostituiti questi valori nella equazione (26) ci si ~~presenterà~~ affaccierà $\alpha(M)^2 + 2e(M) - N = 0$, formola da cui si deduce $(M) = \sqrt{\frac{N}{\alpha} + \frac{e^2}{\alpha^2}} - \frac{e}{\alpha}$ (27).

Si collochi in cambio di (M) lo scoperto valore nella formola (27), e ne risulterà

$$\frac{\overline{\sqrt{\frac{N}{\alpha} + \frac{e^2}{\alpha^2}} - \frac{e}{\alpha}}\cdot b^3\cdot\overline{a-c}\cdot x}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2} + \overline{\sqrt{\frac{N}{\alpha} + \frac{e^2}{\alpha^2}} - \frac{e}{\alpha}}\cdot ab^2\cdot\overline{a-c}} = y \;(28)$$

equazione alla linea retta, espressa per le masse m, M; per le altre costanti; e per le coordinate x, y.

Corollario I

Se $G = 0$, &c.

Problema X.

Pongo nel denominatore in vece di $bk-ch$ la ritrovata eguale grandezza, a me si presenta

$$(m) = \frac{GMc . \overline{bk^2 - 2chk + bh^2 + (M) m a^2 b^3 . \overline{b^2-c^2}^2}}{gm^2a^3b^3 . \overline{b^2-c^2}^2 + gm(M)ab^5 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c} + GMma^2b^3c . \overline{b^2-c^2}}$$

Si aveva inoltre essere

$$bk^2 = (M)^2 a^2 b^5 . \overline{a-c}^2 + 2m(M)a^3b^3 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c} + m^2a^4b . \overline{b^2-c^2}^2$$

$$-2chk = -2(M)^2 ab^5c . \overline{a-c}^2 - 2m(M)a^2b^3c . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}$$

$$bh^2 = (M)^2 b^7 . \overline{a-c}^2$$

Quindi abbiamo

$$(m) = \frac{GMc . (M)^2 . \overline{a^2b^4 - 2ab^4c + b^6} . \overline{a-c}^2 + (M) 2ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}}{gm^2a^3b^2 . \overline{b^2-c^2}^2 + (M) gmab^4 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}^2}$$

$$+ \frac{GMc . (M) ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2} + m^2a^4 . \overline{b^2-c^2}^2}{gm^2a^3b^2 . \overline{b^2-c^2}^2 + (M) gmab^4 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}}$$

ma $M-(M) = (m)$; dunque

$$(M)^2 . \overline{gmab^6 - gmab^4c^2 + GMa^2b^4c - 2GMab^4c^2 + GMb^6c} . \overline{a-c}^2$$
$$+(M) GMc . \overline{2ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c} + ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2}^2}$$
$$+(M) . \overline{-gmMab^4 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}^2 + gm^2a^3b^2 . \overline{b^2-c^2}^2}$$
$$+ \overline{Gm^2Ma^4c - gm^2Ma^3b^2} . \overline{b^2-c^2}^2 = 0 \quad (26)$$

Faccio $\overline{gmab^6 - gmab^4c^2 + GMa^2b^4c - 2GMab^4c^2 + GMb^6c} . \overline{a-c}^2 = L$,

$GMc . \overline{2ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c} + ma^2b^2 . \overline{b^2-c^2}^2}$
$- gmMab^4 . \overline{b^2-c^2} . \overline{a-c}^2 + gm^2a^3b^2 . \overline{b^2-c^2}^2$
$= 2Q$,

$\overline{Gm^2Ma^4c - gm^2Ma^3b^2} . \overline{b^2-c^2}^2 = -N$

Sostituiti questi valori nella equazione (26), ci si presenterà

$L(M)^2 + 2Q(M) - N = 0$, formola da cui si deduce $(M) = \sqrt{\frac{N}{L} + \frac{Q^2}{L^2}} - \frac{Q}{L}$ (27).

Si

393

Problema X.

Si collochi in cambio di (M) lo scoperto valore nella formula (24), e ne risulterà

$$\frac{\sqrt{\frac{N}{\mathcal{L}}+\frac{e^2}{\mathcal{L}^2}}-\frac{e}{\mathcal{L}}\cdot b^3\cdot\overline{a-c}\cdot x}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}+\sqrt{\frac{N}{\mathcal{L}}+\frac{e^2}{\mathcal{L}^2}}-\frac{e}{\mathcal{L}}\cdot ab^2\cdot\overline{a-c}} = y \quad (26.)$$

equazione alla linea retta, espressa per le masse m, M, per le altre costanti, e per le coordinate x, y.

Corollario I.

Se $G=0$, cioè a dire se il triangolo ACK sia privo di gravità, abbiamo

$$\mathcal{L} = gmab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2$$

$$2e = gm^2a^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2 - gmMab^4\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a-c}^2$$

$$N = gm^2Ma^3b^2\cdot\overline{b^2-c^2}^2.$$

Quindi $\frac{N}{\mathcal{L}} = \frac{mMa^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{b^2\cdot\overline{a-c}^2}$

$$\frac{e}{\mathcal{L}} = \frac{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}-Mb^2\cdot\overline{a-c}^2}{2b^2\cdot\overline{a-c}^2} =$$

$$\frac{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2\cdot\overline{a-c}^2}-\frac{M}{2}, \text{ ed}$$

$$\frac{e^2}{\mathcal{L}^2} = \frac{m^2a^4\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{4b^4\cdot\overline{a-c}^4}-\frac{mMa^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2\cdot\overline{a-c}^2}+\frac{M^2}{4}.$$

Aggiungo $\frac{N}{\mathcal{L}}$, e trovo

$$\frac{e^2}{\mathcal{L}^2}+\frac{N}{\mathcal{L}} = \frac{m^2a^4\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{4b^4\cdot\overline{a-c}^4}+\frac{mMa^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2\cdot\overline{a-c}^2}+\frac{M^2}{4}$$

ed estraendo la radice

$$\sqrt{\frac{e^2}{\mathcal{L}^2}+\frac{N}{\mathcal{L}}} = \frac{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2\cdot\overline{a-c}^2}+\frac{M}{2}, \text{ e final-}$$

mente $\sqrt{\frac{e^2}{\mathcal{L}}+\frac{N}{\mathcal{L}}}-\frac{e}{\mathcal{L}} = M$ + Troveremo

+ Effettuata la sostituzione nella formula 26. troveremo &c.

dunque

Dunque, nuovamente come nel Pro-
blema VII.

$$\frac{Mb^3\cdot\overline{a-c}\cdot x}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{a-c}} = y$$

Corollario II.

Quando la linea GK = c=0, movendosi il triangolo ACK sopra una linea orizzontale, egli è lo stesso come se essendo privo di gravità fosse G=0. Ponendo pertanto nella formola del precedente Corollario c=0, scopriremo come nel Problema I.

$$\frac{Mbx}{\overline{m+M}\cdot a} = y.$$

Corollario III

Fingasi la gravità g del corpo m uguale a nulla, e sarà, ridotto il computo,

$$\frac{e}{L} = \frac{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{a-c}^2}+\frac{1}{a^2-2ac+b^2}},$$

$$\frac{e^2}{L^2} = \frac{m^2a^4\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{4b^4}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{a-c}^4}+\frac{2}{\overline{a-c}^2\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}+\frac{1}{\overline{a^2-2ac+b^2}^2}}$$

$$\frac{N}{L} = \frac{m^2a^4\cdot\overline{b^2-c^2}^2}{4b^4}\cdot\frac{-4}{\overline{a-c}^2\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}},$$

$$\sqrt{\frac{e^2}{L^2}+\frac{N}{L}} = \frac{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{2b^2}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{a-c}^2}-\frac{1}{a^2-2ac+b^2}},$$

e per ultimo

$$\sqrt{\frac{e^2}{L^2}+\frac{N}{L}}-\frac{e}{L} = \frac{-ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}}{b^2\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}.$$

Sostituito questo valore nella formola (28), mi si presenta dopo i necessarj calcoli $\frac{-ab+cb}{b^2-ac}\cdot x = y$.

In

BBB

Problema X.

In questo incontro il canale AC (Fig. 10), dentro a cui si suppone collocato il corpo m, spinga esso corpo per una direzione normale al canale stesso. Quindi condotta AH normale ad AC, per la linea AH si muoverà il corpo m rispettivamente allo spazio immobile, senza veruna dipendenza in riguardo alla detta direzione da qualsivoglia valore della massa m; M. Si continui CQ sino in P, CK sino in H, e sia PR parallela a QK, SP parallela a CH.

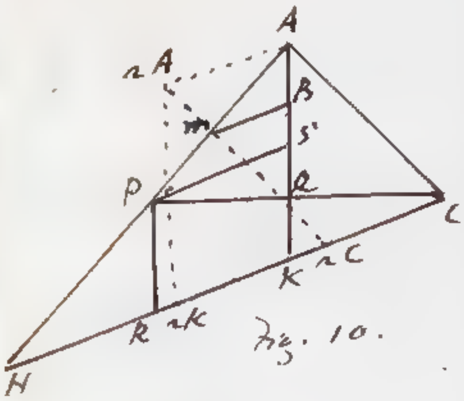


Fig. 10.

Poichè è retto l'angolo PAC, avremo

$$CQ : QA :: QA : QP$$

$$\sqrt{b^2-c^2} : a-c :: a-c : \frac{\overline{a-c}^2}{\sqrt{b^2-c^2}} = QP.$$

Inoltre per la similitudine dei triangoli CQK, CPR

$$CQ : CK :: QP : KR = SP$$

$$\sqrt{b^2-c^2} : b :: \frac{\overline{a-c}^2}{\sqrt{b^2-c^2}} : \frac{b\cdot\overline{a-c}^2}{b^2-c^2} = SP$$

$$CK : KQ :: CK + KR : RP = KS$$

$$b : c :: b + \frac{b\cdot\overline{a-c}^2}{b^2-c^2} : c + \frac{c\cdot\overline{a-c}^2}{b^2-c^2}$$

$$= \frac{c\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}{b^2-c^2} = RP = KS.$$

Per la qual cosa $AS = AK - KS =$

$$a - \frac{c\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}{b^2-c^2} = \frac{\overline{a-c}\cdot\overline{b^2-ac}}{b^2-c^2}.$$

Segnata $AB = x$, e condotta $Bm = -y$ parallela a CH, la somiglianza

dei

Problema X.

BBH

Dai triangoli ASP, ABm mi suggerisca li analogia

$AS : SP :: AB : Bm$

$\frac{\overline{a-c}\cdot\overline{b^2-ac}}{b^2-c^2} : \frac{b\cdot\overline{a-c}^2}{b^2-c^2} :: x : -y$.

la quale mi guida all'equazione $\frac{-ab+cb}{b^2-ac}\cdot x = y$, che abbiamo ritrovato di sopra deducendola dalla formola generale.

†Nella figura 10, che ha l'angolo ACK acuto, abbiamo $\overline{CK}^2 = b^2$ maggiore di $AK \cdot KQ = ac$, laonde b^2-ac è quantità positiva, e giacchè $-ab+cb$ è quantità negativa, alle x positive corrispondono le y negative. Perciò quando il triangolo ACK sarà passato nel sito $\pi A\pi C\pi K$, il corpo m sarà disceso lungo il canale per lo spazio $\pi A m$

Se l'angolo ACK sia retto, avremo $b^2-ac=0$, e per conseguenza a qualunque valore di $Bm = -y$ si riferirà sempre $AB = x = 0$. In fatti in tal caso le linee AH, CK saranno parallele, il che richiede $AB = x = 0$. Il corpo m non si partirà mai dal punto A del canale AC, e si troverà in πA, mentre il triangolo ACK si è trasferito nel sito $\pi A\pi C\pi K$.

Dato che l'angolo ACK (fig. 11.) sia ottuso

† Se $AQ = a-c = 0$, è sempre $y=0$, assegnato ad x qualunque valore. In sì fatta ipotesi la linea AH coincide colla AK, ed il corpo m, benchè non grave, stimolato dal canale cala abbasso per la linea del piombo AK.

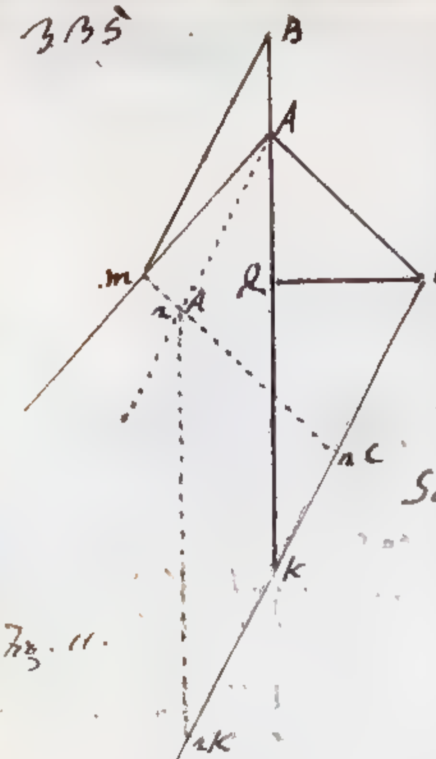


Fig. 11.

ottuso, ne risulta b^2-ac grandezza negativa, ed alle x negative corrispondono le y altresì negative. Qualora il triangolo ACK sarà giunto nel sito $rArCrK$, il corpo m avrà passato per la direzione $rCrA$ lo spazio rAm, ascendendo lungo il canale rCm.

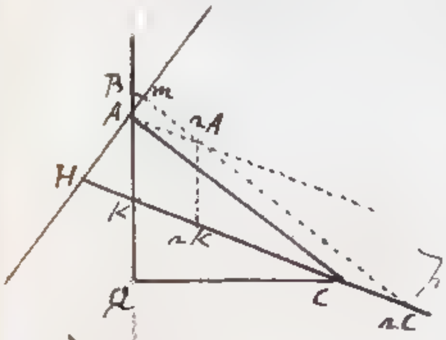


Fig. 12.

Se il punto K cadesse (Fig. 12.) fra i punti Q, A, bisognerebbe cangiare il segno della specie c, e ne nascerebbe $-\frac{ab-cb}{b^2+ac}\cdot x = y$. Alle x negative AB pertanto si addatterebbero le y positive Bm, ed il corpo m, salirebbe in riguardo al canale, trovandosi in m, mentre il triangolo ACK è disceso nel sito $rArCrK$.

Fingasi, che la linea CK coincida colla CA, e facilmente ci accorgeremo, che il corpo m prescindendo dal fregamento, si fermerà nel punto A rispettivamente allo spazio immobile, e per conseguenza ascenderà in relazione al canale, toccando punti sempre più lontani da C.

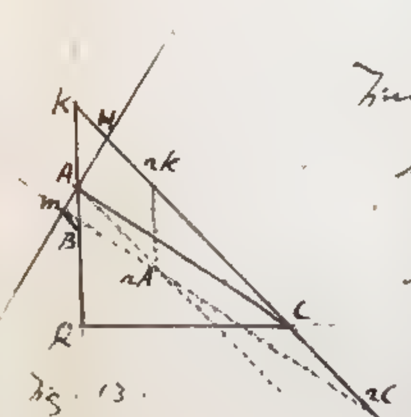


Fig. 13.

Finalmente il punto K (Fig. 13.) si determini più alto del punto A, e cangiato il segno alla costante a, la nostra formola prenderà l'aspetto seguente $\frac{ab-cb}{b^2-ac}\cdot x = y$. Sendo negativa la quantità $a-c = AK-KQ$, ed al contrario positiva la quantità b^2-ac a cagione dell'angolo ACK acuto, alle x positive

positiva AR si riferiscano le y negative Rm, ed il corpo m viaggerà da A verso m ascendendo lungo il canale.

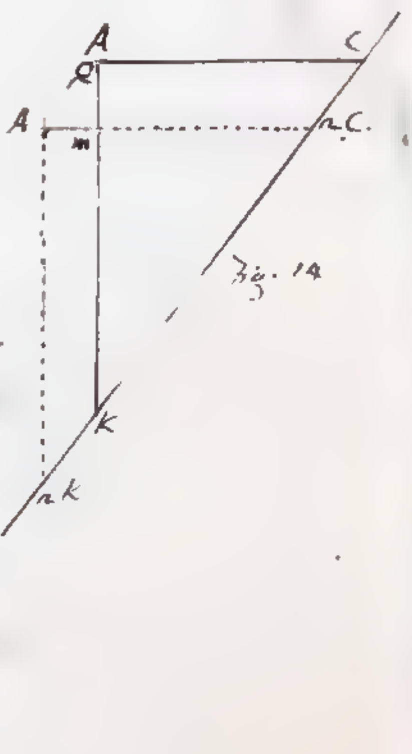
Corollario IV.

Amendue i corpi m, M vengano stimolati dalla medesima gravità, onde abbiasi $g = G$. Dalla equazione (22.)

$$\frac{(M)\,b^2\,\overline{a-c}\,x}{m a^2\,\overline{b^2-c^2}+(M)\,a b^2\,\overline{a-c}} = y$$

imparasi, che sarà $y = 0$, assegnato ad x qualunque valore, qualora sia $AR = a-c = 0$, ovvero $(M) = 0$.

Nel primo caso il corpo m (fig. 14) è appoggiato ad un piano orizzontale AC, o pure RC, e discende per la linea del piombo RK, da cui il canale RC non può farlo deviare, prescindendosi dal qualsivoglia [illegible] pressione.



Passiamo al secondo caso, e perchè $(M) = 0$, scopriremo per la equazione (27.) $(M) = \sqrt{\frac{N}{\alpha}+\frac{e^2}{\alpha^2}} - \frac{e}{\alpha}$, $N = g m^2 M a^3 b^2 - g m^2 M a^4 c \cdot \overline{b^2-c^2}^2 = 0$, o sia $g m^2 M a^3 \cdot \overline{b^2-ac} \cdot \overline{b^2-c^2}^2 = 0$. Si rifletta primieramente, che avremo il nulla, quando sia $b^2-ac = 0$, e per conseguenza retto l'angolo ACK, il che avverandosi, il corpo m cala abbasso per la verticale AK, e ciascuno de' due pesi gm, gM si impiega soltanto ad accelerare la propria massa.

fig. 15

Si trova parimente N e perciò anche $M = 0$, qualora sia $\sqrt{b^2-c^2} = RC = 0$; ma in tal congettura nulla ricavasi dalla formola (22.) la quale si trasforma

Problema X.

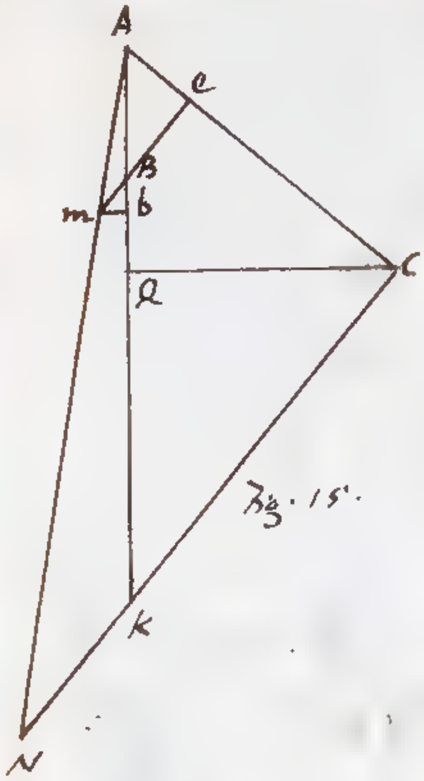


Fig. 15.

forma così $\frac{0 \cdot x}{0} = y$. Per vedere cosa succeda, fingo infinitamente piccola la linea QC (fig. 15.). Pongo $AQ = A$, $QC = B$, e lascio a Qk la denominazione c. Avremo pertanto $a = A+c$, $b = \sqrt{B^2+c^2}$, $a-c = A$, $b^2-c^2 = B^2$. Fatte queste sostituzioni nei valori di $2Q$, L, N contenuti verso il fine della soluzione del presente Problema, troveremo nella ipotesi di $G=g$

$$2Q = 2gmMB^2A^2c \cdot \overline{A+c}^2 \cdot \overline{B^2+c^2} - gmMB^2A^2 \cdot \overline{A+c} \cdot \overline{B^2+c^2}^2$$
$$+ gmMB^4c \cdot \overline{A+c}^2 \cdot \overline{B^2+c^2} + gm^2B^4 \cdot \overline{A+c}^3 \cdot \overline{B^2+c^2}.$$

Supposta B menoma, avremo ridotto che sia il computo

$$2Q = 2gmMA^2B^2c^3 \cdot \overline{A+c}^2 - gmMA^2B^2c^4 \cdot \overline{A+c}$$

Le predette sostituzioni mi danno

$$L = \overline{gmB^2A^3 + gmB^2A^2c + gMA^4c + gMB^2A^2c} \cdot \overline{B^2+c^2}^2$$

e nella ipotesi di B infinitesima

$$L = gMA^4c^5$$

Ne dedurremo altresì

$$N = gm^2MB^4 \cdot \overline{A+c}^3 \cdot \overline{B^2-Ac}\text{, e nella}$$

supposizione di B menoma

$$N = -gm^2MAB^4c \cdot \overline{A+c}^3$$

Sarà pertanto nella mentovata circostanza,

~~$(M) = \sqrt{\frac{Q^2}{L^2} + \frac{N}{L}} - \frac{Q}{L} = \frac{dQ}{ue}$~~

Con effettuati i necessarj calcoli,

$$\frac{Q}{L} = \frac{2mB^2 \cdot \overline{A+c}^2 - mB^2c \cdot \overline{A+c}}{2A^2c^2};$$

~~$\frac{Q^2}{L^2}$~~ $\frac{N}{L} = -\frac{4m^2AB^4 \cdot \overline{A+c}}{4A^4c^4}$, e perciò

$$(M) = \sqrt{\frac{Q^2}{L^2} + \frac{N}{L}} - \frac{Q}{L} = -\frac{mAB^2 \cdot \overline{A+c}}{A^2c^2}.$$

Sostituiti

Sostituiti nella formola (2A) in luogo di a, b, (M) gli stabiliti valori, scopriremo nella ipotesi di B minima $-\frac{x}{0} = y$, o sia $x = -y \cdot 0$, formola che mi insegna essere sempre $AB = x = 0$, assegnato a $Bm = -y$ qualunque valore. E giacché i triangoli Bbm, KAC sono simili, posta $AC = 0$, sarà parimente $bm = 0$, e quindi $Bb = Ab = -y$. Essendo $AB = x = 0$, si annulla altresì $Bc = z$. Ambedue adunque i pesi m, (M) agiscono per lo stesso spazio $Ab = -y$, e coincidendo AN, CK colla verticale AK, discendono le masse m, M per AK, la linea predetta AK colla velocità dei gravi cadenti. Questa verità per se stessa patente l'ho voluta dedurre dalla equazione generale (2A), onde vie più si confermi la sua aggiustatezza.

Corollario V.

Perché $(M) = 0$ e mentre è retto l'angolo ACK, e mentre il detto angolo si eguaglia a due retti, ci ha da essere un caso intermezzo, in cui la massa (M) abbia un massimo valore negativo. Ho detto negativo; perché qualora l'angolo ACK è maggiore del retto, la quantità b^2 ac. è negativa, e per conseguenza diviene altresì negativa la grandezza

N=

379

Problema X.

$N = g\,\mathrm{uni}^2 M a^3 : \sqrt{b^2 ac} : \sqrt{b^2 - c^2}$. Ora posta N negativa, si trova tale per la formola (27.) anche la massa $(M) = \sqrt{\frac{a^2}{L^2} + \frac{N}{L}} - \frac{a}{L}$. Differenzio la equazione $L(M)^2 + 2a(M) = N$, da cui si è dedotta la formola (27), ed ho $2L(M)\,\partial(M) + (M)^2 \partial L + 2a\,\partial(M) + 2(M)\,\partial a = \partial N$, e ponendo $\partial(M) = 0$, $(M)^2 \partial L + 2(M)\,\partial a = \partial N$; e dopo le convenienti operazioni

$$(M) = \sqrt{\frac{\partial a^2}{\partial L^2} + \frac{\partial N}{\partial L}} - \frac{\partial a}{\partial L}$$

: ma per la formola (27.)

$$(M) = \sqrt{\frac{a^2}{L^2} + \frac{N}{L}} - \frac{a}{L}$$

; dunque

$$\sqrt{\frac{\partial a^2}{\partial L^2} + \frac{\partial N}{\partial L}} - \frac{\partial a}{\partial L} = \sqrt{\frac{a^2}{L^2} + \frac{N}{L}} - \frac{a}{L}.$$

Da questa equazione, sostituendo in cambio di a, L, N, e delle loro flussioni i rispettivi valori, si deduce il valore di b, che sola dee considerarsi come variabile nel prendere le differenze, a cui corrisponde la massima (M) negativa. Io lascio a chi vuol tollerar la fatica l'effettuare un sì lungo calcolo.

Dunque i limiti dell'angolo ACK uguale ad uno, o a due retti la massa (M), e la ordinata (Fig. 16.) Bm = −y sono negative, ed il corpo m trasportato dal triangolo ACK discende per la linea AN.

Corollario VI.

~~massima inassumibile; ed adeguatamente nelle conseguenze di conseguenza … della radice della superiore equazione sarà (M) = a e questa serve col presente problema. La condizione di (M) = c vi riduce che nella formula (n 4.) $\frac{(M) b^2 ab - cb\, x}{m a^2 b^2 - c^2 + (M) b^2 ab - cb}$ = y cioè y = x, essendo uno de' quadri[illegible] … valore … la quantità … negativa … presente il triangolo … discendendo … perpendicolare … di [illegible] … posto.~~

Corollario.

~~Giacchè (M) = … vertice del triangolo ACK … il detto triangolo ACK … angolo … sia … in cui la formula (M) abbia un massimo … negativo … ; perchè qualunque angolo ACK è … la quantità … negativa … grandezza … $\overline{b^2 - c^2}$ … con la formula (n 4.) anche la nuova $(M) = \sqrt{\frac{N}{2} + \frac{a^2}{2^2}} \pm \frac{a}{2}$ … Differenziando la equazione … (M) = N, … la formula (n 4.), … 2a (M) d(M).~~

adeguando spresso il coefficiente di (M), si scopre infinitesima essa grandezza (M), e per conseguenza trascurabile il suo quadrato $(M)^2$. Avremo dunque, ridotto il computo,

$$(M) = \frac{-mMAB^2}{\overline{m+M}\cdot B^2 + MA^2\cdot c}.$$

La formula (n 4.)

$$\frac{(M)\, b^2\, \overline{a-c}\cdot x}{m a^2\cdot \overline{b^2-c^2} + (M)\, b^2\cdot \overline{a^2-ac}} = y,$$

sostituendo in essa in cambio di a, b i loro valori testè stabiliti, prende il seguente aspetto

$$\frac{(M)\, \overline{B^2+c^2}^{\,2}\cdot Ax}{m\cdot \overline{A+c}\cdot B^2 + (M)\, \overline{B^2+c^2}\cdot \overline{A+c}\cdot A} = y,$$

o sia cancellati i termini incombinabili,

$$\frac{(M)\, Acx}{mB^2 + (M)\, Ac} = y.$$

Finalmente si ponga in luogo di (M) il scoperto valore, e ne proverrà

$$\frac{-MA^2x}{\overline{m+M}\cdot B^2} = y.$$

Ella è curiosa la conseguenza, che qualunque il triangolo ACK discenda adeguatamente per la linea del piombo, e sia (M) quantità infinitesima

~~$2d(M)\,d(M) + (M)^2 ddb + a\,d(M) + a(M)\,da = dM$, e ponendo $d(M) = 0$,~~

~~$(M)^2 ddb + 2(M)\,da = dM$, e dopo le convenienti operazioni~~

~~$(M) = \sqrt{\frac{da^2}{db^2} + \frac{dM}{db}} - \frac{da}{db}$; e ma per la formola (...)~~

~~$(M) = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{M}{b}} - \frac{a}{b}$; dunque~~

~~$\sqrt{\frac{da^2}{db^2} + \frac{dM}{db}} - \frac{da}{db} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{M}{b}} - \frac{a}{b}$.~~

~~Da questa equazione, sostituendo in vece di da, db, dM, delle loro flussioni i rispettivi valori, e se ne deduca il valore di b, a cui corrisponde la massima (M) [illegible] ma lascio ad altri [illegible] la fatica e l'effettuare un sì lungo calcolo.~~

~~1 [illegible] differenza;~~

~~Dentro i limiti del triangolo retto AKx [illegible] la massa (M) [illegible] la ordinata (Fig. 10) [illegible] negativa, ed il corpo [illegible] trasportato dal triangolo [illegible] discende per la distanza AK.~~

~~† uguali ad [illegible] retti~~

Corollario VI.

Se il punto K (Fig. 6.) sta di mezzo fra i punti Q, A, si possono dare tre casi. Considerandosi come date, e finita la linea AQ, QC, la linea QK = c può determinarsi talmente piccola, che il corpo posto in faccia vincolare, ad ascendere il triangolo ACK. Giunta QK ad una grandezza, che

che stabilivamo, il detto triangolo sia fermo, ed il corpo m discende per la linea AC. Seguendosi ΩK ancora più grande, il triangolo cala abbasso per la linea KC.

Cerco il caso, in cui il triangolo non si move, e scendendo il corpo m per la linea AC, abbiamo $y = z = \frac{bx}{a}$. Posta nella formola (2A)

$$\frac{(M)\,b^2 \cdot \overline{ab-cb} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + (M)\,ab \cdot \overline{ab-cb}} = y$$

ordinata $y = \frac{bx}{a}$, si trova

$(M) \cdot 0 = ma \cdot \overline{b^2-c^2}$, cioè a dire $(M) = \infty$. Imperciocchè dalla formola

$\sqrt{\frac{a^2}{L^2}+\frac{N}{L}} - \frac{a}{L} = (M)$ diviene $(M)=\infty$, qualora L pareggia il nulla; cangiato adunque il segno alla lettera c, dovrà essere $L =$

$$\overline{gmab^6 - gmab^4c^2 - gMa^2b^4c - 2gMab^4c^2 - gMb^6c \cdot \overline{a+c}^2} = 0,$$

e per conseguenza

$$Mc = \frac{ma \cdot \overline{b^2-c^2}}{a^2+2ac+b^2}.$$

Si tiri (Fig. 16.) kmk normale ad AC, e sia mk la forza, colla quale il corpo m preme il piano AC; la qual forza si determina colla nota risoluzione del peso ZR = gm del nominato corpo m.. Fingasi, che il triangolo ACK retroceda per lo spazio menomissimo C2C = A2A = ds, e per i punti O, 2A si tirino la linea OL parallela a KC, 2AP parallela a ΩC. Da simiglianza

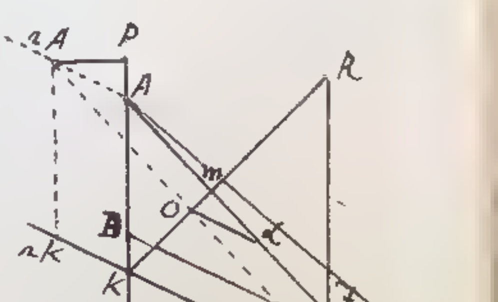


Fig. 16

343

similitudine dei triangoli ACQ, zkm, Akm ci dà le analogie

$$AC : CQ :: zk : km$$
$$\sqrt{a^2+2ac+b^2} : \sqrt{b^2-c^2} :: gm : \frac{gm\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+2ac+b^2}}$$
$= km$

$$AC : CQ :: Ak : km$$
$$\sqrt{a^2+2ac+b^2} : \sqrt{b^2-c^2} :: a : \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+2ac+b^2}}$$
$= km$.

Dalla similitudine dei triangoli Ckm, LOm si ricava

$$Ck : km :: LO : Om$$
$$b : \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+2ac+b^2}} :: ds : \frac{ads\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2+2ac+b^2}}$$

$= Om$.

Finalmente i triangoli simili CkQ, $2AAP$ ci somministrano le analogie

$$Ck : kQ :: 2AA : AP$$
$$b : c :: ds : \frac{cds}{b} = AP$$

Mentre il triangolo ACk si è mosso all'indietro per lo spazietto CzC, la pressione km ha esercitata azione per lo spazio mO, ed il peso gM del triangolo ACk ha esercitata reazione per lo spazio AP. Se adunque il predetto triangolo non ha da far moto, egli è di uopo, che le predette azione, e reazione siano fra loro eguali, onde si abbia l'equazione $km \cdot mO = gM \cdot AP$, e sostituendo in vece delle linee i valori testé

determinati

determinati,

$$gM \cdot \frac{cds}{b} = \frac{gm\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+2ac+b^2}} \cdot \frac{ads\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2+2ac+b^2}},$$

o sia $Mc = \frac{ma \cdot \overline{b^2-c^2}}{a^2+2ac+b^2}$, ch'è quella stessa formola, che dalla nostra generale abbiamo dedotta, la quale prendendosi siccome date le altre quantità, ci somministra qual tal valore di c, posto il quale, il triangolo ACK non si move, ed il corpo m discende per AC. Se alla linea QK = c si assegna un valore più piccolo, il triangolo retrocede, e se ad essa si attribuisca un valore più grande, il triangolo discende.

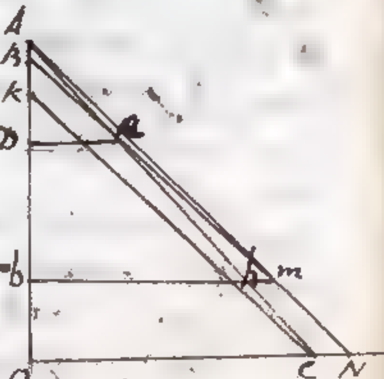


fig. 17

Resta la cosa ancora più generalmente, il triangolo ACK starà sempre fermo, qualora le quantità m, M, a, b, c abbiano fra loro tal relazione, che si verifichi la formola $Mc = \frac{ma \cdot \overline{b^2-c^2}}{a^2+2ac+b^2}$.

Corollario VII.

Se i punti A, K (tra loro) coincidano, onde abbiasi AK = a = 0, egli è chiaro che i due corpi m, M discendono per la stessa direzione AC con pari velocità. Si dedurrà ciò evidentemente dalla formola (12), fingendo AK = a infinitamente piccola, e le altre quantità finite, e supponendo che in tal caso il corpo m discenda per AN. Replico la formola (12) mutato il segno della lettera c.

$$\frac{(M) \cdot b^2 \cdot \overline{ab+cb} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + (M)ab \cdot \overline{ab+cb}} = y \; *$$

cancellando

*Puoi vedere nel Corollario VII del Problema XI come nella presente ipotesi $(M) = -\frac{ma \cdot \overline{b^2-c^2}}{b^2c}$. Sostituito questo valore, troverassi $\frac{\overline{a+c} \cdot b \cdot x}{a^2} = y$ o sia $\frac{cbx}{a^2} = y$: ma $\frac{bx}{a} = z$; dunque $\frac{cz}{a} = y$; e per conseguenza $y = \frac{Bm \cdot z}{a}$ infinitamente maggiore di $z = BQ$, e ciò perchè supposto finita la linea $BQ = z$, è $m = \infty$.

egli

Problema X.

~~cancellando la quantità rispettivamente nulla $\frac{(M)b^3cx}{(M)ab^2c} = y$, ne conseguentemente $\frac{bx}{a} = y$ invece $\frac{bx}{a} = z$; dunque $y = z$, e perciò il corpo ne discende per la linea AC; giacchè $a = 0$, abbiamo $ay = bx$; formola che prediceva a qualunque valore di y corrispondere sempre $x = 0$.~~

Corollario VIII.

(fig. 15) Sia QK il valore di c, quando il triangolo ACK non si mova, e stando la grandezza di c dentro i limiti QK, QA, il corpo m calerà abbasso per la linea AN, e sarà $QN > QC$. Ora perchè il corpo m discende per AC o sia $c = QK$, o sia $c = QA$, si inferisca, che ci ha da essere un valore di c medio fra QK, QA, a cui risponda la massima grandezza della linea QN, ed il massimo allontanamento della linea AN dalla linea AC.

Tirata per il punto N la linea ND parallela a CK, e nominate come nel corollario IV. $AQ = A$, $QC = B$, ed inoltre $KQ = c$, $QD = x$, $DN = y$, avremo per la similitudine dei triangoli QKC, QDN

$$QK : KC :: QD : DN$$
$$c : \sqrt{B^2+c^2} :: A-x : y$$

e conseguentemente l'equazione $\frac{\sqrt{B^2+c^2}\cdot\overline{A-x}}{c} = y$: ma per la [illegible] formola

Egli è d'uopo provare, che quantunque la linea Qm sia infinita, nulladimeno l'angolo CAN è minimo, e le due rette AC, AN ad ogni punto coincidono posto che sia minima la linea $AK = a$, e coinciderebbero matematicamente, se fosse $AK = a = 0$. Si tiri parallela a QC la linea uD, mb per i punti D, m, e si segni colla lettera h quel punto, in cui mb taglia la linea AC.

Giacchè Bm, KC sono parallele, avremo

$$KC : CQ :: mB : mb$$
$$b : \sqrt{b^2-c^2} :: y : \frac{y\sqrt{b^2-c^2}}{b}$$

e quindi $mb = \frac{y\sqrt{b^2-c^2}}{b}$.

Inoltre

$$CK : KQ :: mA : Ab$$
$$b : c :: y : \frac{cy}{b}$$

e perciò $Ab = \frac{cy}{b}$, ed

$$Ab = x + \frac{cy}{b} = \frac{a}{c}y + \frac{cy}{b}$$

sostituito in cambio di x il suo valore

$$= \frac{a^2+c^2}{cb}\cdot y$$

$$AQ : QC :: Ab : bh$$
$$a+c : \sqrt{b^2-c^2} :: \frac{a^2+c^2\cdot y}{cb} : (bh)$$

dunque $bh = \frac{\sqrt{b^2-c^2}\,|\,a^2+c^2\cdot y}{\overline{a+c}\cdot cb}$

ed $hm = bm - bh =$

$$\frac{y\sqrt{b^2-c^2}}{b} - \frac{y\sqrt{b^2-c^2}\cdot\overline{a^2+c^2}}{\overline{a+c}\cdot cb} =$$

$$\frac{y\sqrt{b^2-c^2}\cdot\overline{ac-a^2}}{b\cdot\overline{ac+c^2}} = \frac{y\sqrt{b^2-c^2}\,|\,a}{bc}$$

quantità minima [illegible] delle [illegible] quantità [illegible] quando di $AK = a$, e che diventa

formula (24.) accomodata alle presenti denominazioni

$$\frac{(M)A\cdot\overline{B^2+c^2}^{\frac{3}{2}}\cdot x}{mB^2\cdot\overline{A+c}^2+(M)A\cdot\overline{A+c}\cdot\overline{B^2+c^2}}=y;$$

dunque

$$\frac{(M)A\cdot\overline{B^2+c^2}^{\frac{3}{2}}\cdot x}{mB^2\cdot\overline{A+c}^2+(M)A\cdot\overline{A+c}\cdot\overline{B^2+c^2}}=\frac{\overline{B^2+c^2}^{\frac{1}{2}}\cdot\overline{A-x}}{c},$$

e posti in opera i calcoli convenienti

$$BQ=A-x=\frac{(M)A^2c\cdot\overline{B^2+c^2}}{(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2}$$

diventa = o, posta a = o, nel qual caso la linea AN si sovrappone esattamente alla linea AC. Coincidendo le due rette AN, AC, a prima vista cade in pensiero, che vengano uguali le ordinate BQ = z, Bm = y, e pure ciò si allontana dal vero, essendosi dimostrato infinitamente minore di y. La Geometria, e l'Analisi hanno i loro misteri.

essendo pertanto

$$KQ : AC :: BQ : QN$$

$$c : B :: \frac{(M)A^2c\cdot\overline{B^2+c^2}}{(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2} : \frac{(M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}}{(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2}$$

avremo

$$QN=\frac{(M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}}{(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2}$$

Quando QN giunge alla massima grandezza, la sua differenza, considerata in qualità di variabile, dee pareggiare il nulla onde si abbia o =

$$\frac{D\left((M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}\right)}{(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2}-\frac{(M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}\cdot D\left((M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2\right)}{\left((M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2\right)^2}$$

e conseguentemente

$$(M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2\cdot D\left((M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}\right)=$$

$$(M)A^2B\cdot\overline{B^2+c^2}\cdot D\left((M)\overline{B^2+c^2}\cdot\overline{A^2+2Ac}+mB^2\cdot\overline{A+c}^2\right).$$

La formula (29.) mi insegna essere $(M)=\sqrt{\frac{N}{L}+\frac{e^2}{L^2}}-\frac{e}{L}$, ed i valori di e, L, N dati per A, B, c, M, m sono registrati nel Corollario IV. Effettuata la sostituzione del valore di (M) espresso per A, B, c, M, m, e

~~[illegible]~~ la

la differenziazione indicata dalla lettera D, la formola, che ne risulta, determina il valore di x, a cui corrisponda la massima grandezza della retta AN, e per conseguenza il massimo allontanamento della linea AN dalla linea AC.

Corollario IX

Se il punto K ascenda al di sopra del punto A (riguardo) divenga AK = a negativa, il ~~punto N sarà~~ cadere ~~sempre~~ fra i punti C, Q, e solamente quando sia QK = c = ∞, il corpo m discenderà per la linea del piombo AQ. In tale ipotesi si raccoglie dal Corollario IX., avendo la cura di mutare il segno alla lettera c,

$$\frac{N}{\alpha} = \frac{g m^2 M A B^4}{m+M \cdot g A^2 B^2 + g M A^4 \cdot c},$$

quantità infinitamente piccola. Quindi per la formola $(M)^2 + \frac{2e}{\alpha}(M) = \frac{N}{\alpha}$, da cui si è dedotta la formola (19), sarà $(M) = 0$, e dalla equazione (20) ricaveremo $0 \cdot x = y$, ed impareremo, che a qualsivoglia grandezza dell'ascissa x corrispondendo sempre l'ordinata $y = 0$, il corpo m discende per la verticale AQ.

la linea NA prorogata taglierà sempre la linea QC fra i punti &c.

Problema XI.

Determinare la velocità ~~ultima~~ del grave m, e del triangolo ACK (fig. 5) fornito anch'esso di gravità, la cui massa M.

Conosciuto che nel Problema X abbia ~~impiegato~~ determinato.

determinate le velocità delle masse m, M, cioè

$$u = \frac{\sqrt{2gma^3 \cdot \overline{bk-ch} + 2GMac \cdot \overline{bk-ah} \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2} \cdot x}}{\sqrt{ma^3bk \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2} + Mab^2k \cdot \overline{bk-ah}^2}} \quad (24)$$

$$U = \frac{\sqrt{2gmab \cdot \overline{bk-ch} + 2GMbc \cdot \overline{bk-ah} \cdot \overline{bk-ah}^2 \cdot x}}{\sqrt{mabk \cdot \overline{bk^2-2chk+bh^2} + Mab^2k \cdot \overline{bk-ah}^2}} \quad (25)$$

ora deduvrò da queste formole gli opportuni corollarj. Richiami a memoria chi legge essersi posto a cagione di rendere le due formole più semplici

$(M)b^2 \cdot \overline{ab-cb} = h,$

$ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + (M)ab \cdot \overline{ab-cb} = k;$

e che molto la formola (23) stabilisca

$(M) = \sqrt{\frac{N}{L} + \frac{e^2}{L^2}} - \frac{e}{L}$, essendo

$L = GMc \cdot \overline{a^2b^4 - 2ab^4c + b^6} + gmab^4 \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{a-c}^2$

$2e = GMc \cdot 2ma^2b^2 \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{a-c}^2 + ma^2b^2 \cdot \overline{b^2-c^2}^2$

$- gmMab^4 \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{a-c}^2 + gm^2a^3b^2 \cdot \overline{b^2-c^2}^2$

$N = Gm^2Ma^4c - gm^2Ma^3b^2 \cdot \overline{b^2-c^2}^2.$

Corollario I.

Se $G=0$, cioè a dire se il corpo M sia privo di gravità, vagliono tutte le conseguenze contenute nei corollarj del Problema VIII.

Corollario II.

Movendosi il triangolo ACK sopra una linea orizzontale qualora AK $= c = 0$, egli è lo stesso come se fosse la sua gravità $G=0$. Poichè in tale ipotesi $(M) = M$; $h = Mab^3$,

$k =$

Problema XI.

$k = \overline{m+M} \cdot a^2b^2$, sostituiti questi valori, ed effettuate le operazioni necessarie, troveremo come nel [illegible] Problema II.

$$\frac{\sqrt{2gx \cdot \overline{m+M}^2 \cdot a^2 + M^2b^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + \overline{mM+M^2} \cdot b^2}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2gx \cdot m^2b^2}}{\sqrt{\overline{m+M}^2 \cdot a^2 + \overline{mM+M^2} \cdot b^2}} = U.$$

Corollario III.

Si supponga $= 0$ la gravità g del corpo m, e pel Corollario III. del Problema X. avremo

$$(M) = \frac{-ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2}}{b^2 \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}$$, e sarà inoltre

$$h = -\frac{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{ab-bc}}{a^2-2ac+b^2}$$

$$k = \frac{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{b^2-ac}}{a^2-2ac+b^2}$$

$$bk-ch = \frac{ma^2b \cdot \overline{b^2-c^2}^2}{a^2-2ac+b^2}$$

$$bk-ah = ma^2b \cdot \overline{b^2-c^2}$$

[illegible]

[illegible]

$$bk^2-2chk+bh^2 = \frac{m^2a^4b \cdot \overline{b^2-c^2}^3}{a^2-2ac+b^2}$$

Dalla surrogazione di tali valori nelle formole (24), e (25) ne nasce dopo non brevi calcoli

Problema XI.

$$\frac{\sqrt{2GMa^2c \cdot \overline{b^2-c^2} \cdot \overline{a^2-2ac+b^2} : x}}{\sqrt{ma^3 \cdot \overline{b^2-ac}^{\,b^2c^2}_{\,1} + Mab^2 \cdot \overline{b^2-ac} \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2GMb^2c \cdot \overline{a^2-2ac+b^2} \cdot x}}{\sqrt{ma^3 \cdot \overline{b^2-ac}^{\,b^2c^2}_{\,1} + Mab^2 \cdot \overline{b^2-ac} \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}} = U.$$

2 Se $AQ = a-c = o$, cioè a dire se $a=c$, abbiamo veduto nel Corollario III. del Problema X., che scendendo il corpo m discende verticalmente. In detta circostanza averemo

$$\frac{\sqrt{2GMa^2 \cdot \overline{b^2-a^2} \cdot x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2GMb^2x}}{\sqrt{ma^2+Mb^2}} = U$$

Sarà dunque $u : U :: a = QK : b = CK$, e quando il triangolo QCK avrà scorso uno spazio $= CK = b$, il corpo m sarà calato abbasso per lo spazio $QK = a$.

3 Dotto che (fig. 12.) l'angolo ACK sia retto, la linea AH normale ad AC coincide colla linea A2A, e scorrendo i corpi m, M lo stesso spazio A2A in pari tempo, camminano con eguale velocità, dimodochè $u = U$. Essendo in questa ipotesi $AB = x = o$, $b^2-ac = o$, le nostre formole ci danno $u = \frac{o}{o}$, $U = \frac{o}{o}$. ~~egli è dunque~~ Bisogna dunque ~~potranno dedurre~~ ricavare il valore di $u = U$ dalla azione, che esercita la gravità dal

Problema XI.

.. del corpo M. eguagliandosi essa generalmente a $\frac{GMc}{b}\cdot\frac{bx}{a}-y$; ed essendo nel caso presente ~~pel Corollario III. del Problema X. $\frac{ab-cb\cdot x}{b^2ac}=-y$~~ $\frac{bx}{a}=o$,

sarà la predetta azione $=\frac{GMc}{b}\cdot -y$

$=\overline{m+M}\cdot\frac{u^2}{2h}$; e per conseguenza

$$\sqrt{\frac{2GMc\cdot -y}{\overline{m+M}\cdot b}}=\sqrt{\frac{2GM}{m+M}\cdot\frac{DK\cdot Am}{CK}}=u$$

$=U.$

La stessa formola per altro si può dedurre dalla due appropriate alla supposizione di $g=o$ sostituendo in cambio di $\frac{x}{b^2ac}$ il suo valore $\frac{-y}{ab-cb}$ somministrato dalla equazione $\frac{\overline{ab-cb}\cdot x}{b^2ac}=-y$ contenuta nel Corollario III. del Problema X. Adempiuta quella sostituzione ci si presenterà

$$\frac{\sqrt{2GMa^2c\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}\cdot -y}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{ab-cb}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{ab-cb}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}}$$

$=u$.

$$\frac{\sqrt{2GMb^2c\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}\cdot -y}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{ab-cb}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{ab-cb}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}}$$

$=U.$

Si ponga ac in cambio di b^2, ed effettuate le convenienti espurgazioni si troverà

$$\sqrt{\frac{2GMc\cdot -y}{\overline{m+M}\cdot b}}=u=U.$$

Qualora

Problema XI.

4 Qualora sia QK = c = 0, la gravità del corpo M non può agire, ed in fatti si trovano le due velocità u, U eguali a nulla.

5 Che se il punto K fosse collocato (fig. 1a) fra i punti A ed A, divengono negative le linee QK = c, AB = x; e quindi ad ambedue fa di uopo cangiare il segno. Avremo dunque

$$\frac{\sqrt{2GMa^2cx\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{b^2+ac}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{b^2+ac}\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}} = u$$

$$\frac{\sqrt{2GMb^2cx\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}^2}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{b^2+ac}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{b^2+ac}\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}} = U.$$

6 La linea CK sovrappongasi alla CA, onde sia AK = a = 0. Poichè $\frac{bx}{a} = z$, ne risulta $\frac{x}{a} = \frac{z}{b}$. Fatta questa sostituzione, e cancellati i termini, nei quali c'entra a = 0, si troverà $u = 0$, $U = \sqrt{\frac{2Gcz}{b}}$.

Movendosi nella nostra ipotesi il solo corpo M, tutta l'azione della sua gravità si impiega ad imprimere forza viva al detto corpo. Ora essendo anche la quiete del corpo m y, ed x eguali a nulla, l'azione del peso GM, che generalmente pareggia la grandezza $\frac{GMc}{b}\cdot\overline{z-y}$, diverrà $= \frac{GMcz}{b}$. Avremo dunque $\frac{GMcz}{b} = \frac{MU^2}{2}$, o sia $\sqrt{\frac{2Gcz}{b}} = U$. La 2 nel

caso

353

Problema XI.

caso presente saranno prese lungo la linea AC.

7. Finalmente il punto K (Fig. 13.) ascenda al di sopra del punto A, e mutato il segno alla costante a, e saprà verso ed anche alla incognita x, che pel Corollario III del Problema X torna positiva, ne risulterà

$$\frac{\sqrt{2GMa^2cx\cdot\overline{b^2-c^2}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{b^2-ac}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{b^2-ac}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}}=u$$

$$\frac{\sqrt{2GMb^2cx\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}^2}}{\sqrt{ma^3\cdot\overline{b^2-ac}\cdot\overline{b^2-c^2}+Mab^2\cdot\overline{b^2-ac}\cdot\overline{a^2-2ac+b^2}}}=U$$

4 Qualora sendo finite le linee AQ, QC, diventasse AK infinita, le due rette $KA=a$, $KC=b$ si adeguano; e quindi avverandosi l'analogia $u:bu::\sqrt{b^2-c^2}=QC:\sqrt{a^2-2ac+b^2}=AC$ le due velocità dei corpi m, M si corrispondono in proporzione finita. In tal circostanza il triangolo ACK discende per la direzione KC adeguatamente verticale.

Corollario IV.

La medesima gravità sollecita ambedue i corpi m, M, dimodochè sia $g=G$. Ho notato nel Corollario IV. del Problema X., che in tre casi il corpo m discende verticalmente, quando AQ (Fig. 5) $=a-c=0$, quando sendo retto l'angolo ACK, $b^2-ac=0$, e quando parimente [illegible]

finito il

~~[illegible]~~ QK, CK; nel qual ultimo incontro anche il corpo M cala abbasso per la linea del piombo. Ora determino i valori delle velocità u, U nei mentovati tre casi.

il prodotto angolo s'agguaglia a due retti, nel qual ...

1 Nella prima ipotesi di $a = c$ abbiamo

$h = 0$

$k = ma^2 \cdot \overline{b^2 - a^2}$, e quindi per le formole (24) e (25)

$$u = \frac{\sqrt{2gx \cdot a^2 \cdot \overline{m+M}}}{\sqrt{ma^2 + Mb^2}}$$

$$U = \frac{\sqrt{2gx \cdot b^2 \cdot \overline{m+M}}}{\sqrt{ma^2 + Mb^2}}$$

Stanno queste velocità come $QK = a : CK = b$, ossia come gli spazj scorsi in pari tempo, i quali si riguardano sempre come $QK : KC$.

2 La seconda ipotesi di $b^2 = ac$ richiede $(M) = 0$, e perciò ~~[illegible]~~

$h = 0$

$k = ma^2 \cdot \overline{b^2 - c^2} = mac \cdot \overline{a - c}$.

Sostituiti questi valori nelle formole (24) e (25), ne risulta

$u = \sqrt{2gx}$ ~~[illegible]~~

$$U = \sqrt{\frac{2gcx}{a}}$$

Poichè $(M) = 0$, addiviene essere $(m) = M$, e che per conseguenza nella forza viva del corpo M si impiega tutta l'azione del peso gM, e nella forza viva del corpo m tutta l'azione del peso gm: ma nella

presente

premente discontinua, in cui $y = 0$,
l'azione del peso $gm = gmx$,
l'azione del peso $gM = \frac{gMc}{6}z$
$= \frac{gMc}{6} \cdot \frac{6x}{a} = \frac{gMcx}{a}$; dunque

$gmx = \frac{mu^2}{2}$, $\frac{gMcx}{a} = \frac{MU^2}{2}$;
dunque $u = \sqrt{2gx}$, $U = \sqrt{\frac{2gcx}{a}}$
come si è trovato sostituendo i valori di h, e di k nella formola generale (24), e (25.)

Quindi se l'angolo ACK è retto, un corpo nulla altera il moto dell'altro; ma se il predetto angolo è acuto il peso del corpo m accelera il triangolo ACK, ed al contrario se l'angolo mentovato è ottuso, il peso del triangolo ACK accellera il corpo m. In tale ~~in tale~~ incontro bisogna supporre il corpo m collocato dentro il canale AC, mediante il quale dal peso del triangolo ACK esso corpo venga sollecitato.

3 Resta da considerare la terza ipotesi ~~quando A, a sono quantità finite e c = ak, cioè per [illegible] infinitamente [illegible] come si vede [illegible] dal Problema X e A [illegible], [illegible] b = $\sqrt{a^2 B^2}$, [illegible] A, $b^2 c^2$ = B^2. [illegible] Corollario (21) = 0~~

quando

quando l'angolo ACK (fig. 18) pareggiando due retti, abbiamo $\rho c = \sqrt{b^2 - c^2} = 0$, e conseguentemente $b = c$. Ho determinato nel Corollario IV del Problema X. $(M) = -\frac{m AB^3 \cdot \overline{A+C}}{A^2 c^2} = -\frac{m a \cdot \overline{b^2 - c^2}}{\overline{a-c} \cdot c^2}$, sostituendo in cambio di A, B i loro valori $a-c$, $\sqrt{b^2-c^2}$. Poichè $h = (M)\, b^3 \cdot \overline{a-c}$, $k = m a^2 \cdot \overline{b^2 - c^2} + (M)\, a b^3 \cdot \overline{a-c}$, surrogato in vece di (M) il suo valore, trovo

$h = -\frac{m a b^3 \cdot \overline{b^2 - c^2}}{c^2}$, $k = -\frac{m a^2 \cdot \overline{b^2 - c^2}}{c^2}$,

ed agevolmente ne inferisco

$k = \frac{ah \cdot \overline{b^2 - c^2}}{b^3}$. Dalla equazione $\frac{hx}{k} = y$ ne deduco $\frac{x}{k} = \frac{y}{h}$. Nelle formole (24), e (25) si collochi nella seconda espressione in luogo della prima, e di più g in luogo di G, e ne nasceranno

$$u = \frac{\sqrt{-2gy} \cdot \overline{m a^3 \cdot ch - bk + M a^2 c \cdot ah - bk \cdot bk^2 - 2chk + bh^2}}{\sqrt{m a^3 bh \cdot \overline{bk^2 - 2chk + bh^2} + M a b^2 h \cdot \overline{ah - bk}^2}}$$

$$U = \frac{\sqrt{-2gy} \cdot \overline{m a b \cdot ch - bk + M bc \cdot ah - bk \cdot ah - bk^2}}{\sqrt{m a^3 bh \cdot \overline{bk^2 - 2chk + bh^2} + M a b^2 h \cdot \overline{ah - bk}^2}}.$$

Sostituisco in cambio di k lo scoperto valore, ~~considerando $b^2 - c^2$ quantità~~ ~~minima~~, e rigettando i termini moltiplicati per $b^2 - c^2 = 0$, e fatte le necessarie operazioni finalmente trovo $u = U = \sqrt{-2gy}$. Il segno

357

Problema XI.

– nelli omogeneo di comparazione non renda la radice immaginaria, ma significa, che l'ordinata Bm va presa negativamente da B verso m.

Si scoprirebbe più agevolmente il valore delle velocità uguali dei corpi m, M facendo la riflessione, che nelle ipotesi di b^2-c^2 quantità minima, è K primamente più piccola di k. Cancellati adunque nelle formole (24), e (25.) i termini, nei quali ci entra K, con pochi tratti di penna si perverrebbe alla equazione

$$u = U = \sqrt{-2gy}.$$

Corollario V.

Se l'angolo ACK supera un retto, ed è minor di due retti, nella forza viva del corpo m si impiega non solo l'azione del peso gm, ma ancora una parte dell'azione del peso gM, e questa parte diviene massima, quando è tale il valore negativo della massa (M); sopra di che veggasi il Corollario V. del Problema X.

Corollario VI.

Ho notato nel Corollario VI. del Problema X., che quando (Fig. 5.) il punto K sta di mezzo fra i punti C, A si ponno dare tre casi, secondo la varia misura della linea AK, che il corpo M ascenda, stia fermo, o discenda. ~~Andiamo~~ ~~Dalla~~ Ora giacchè quivi ho dimostrato

Problema XI.

Dimostrato, che quando il corpo M sta immobile, ed si avvera la formola $y = \frac{hx}{k} = \frac{bx}{a}$, si deduca dalle equazioni generali (24)(25.) le velocità delle masse m, M, sostituendo ~~cioè alla lettera [illegible] in cambio di k, e mutando il segno della lettera c, e ponendo [illegible]~~ avvertendo essere $bk - ah = 0$.
Per la qual cosa cancellati i termini moltiplicati per $bk - ah$, ne risulta mutando il segno alla lettera c, e ponendo a in luogo di k, b in luogo di h

$$u = \sqrt{2gx \cdot \frac{a+c}{a}}$$

$$U' = 0$$

Nell'istante in cui il corpo m è pervenuto in m, la sua gravità ha esercitata azione per lo spazio

$$AB + Bb = x + cy = x + \frac{cx}{a} = \frac{a+c}{a} \cdot x,$$

la qual azione, non movendosi il corpo M, si impiega tutta nella forza viva del corpo m. Perché scopriremo $gmx \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{mu^2}{2}$,
e conseguentemente
$u = \sqrt{2gx \cdot \frac{a+c}{a}}$, formola conforme a quella, che dalla generale si è ricavata.

Corollario VII.

Posto che sia AK = a = 0, i due punti A, K coincidono, ed i due corpi discendono per la medesima

direzione

Problema Cavalleria XI.

direzione AC. In tale incontro si sovrappongono le rette $KC = AC = AN = b$; svanisca l'ascissa $AB = x$ [illegible] e $AG = \frac{cy}{b}$ è quello spazio, pel quale agiscono le gravità di amendue i corpi m, M. Quindi avremo

$\sqrt{\frac{2gcy}{b}} = u = U.$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] $\frac{x}{a} = \frac{cy}{b}$, [illegible]~~

~~[illegible] $\frac{bx}{a} = \frac{hx}{k} = y$ [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] (xx)(xx)~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] $\frac{x}{a}$ [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$= 0$

~~$u = \sqrt{\frac{2gcy}{b}}$~~

Dove [illegible] dalla formola (xx)

$U = \sqrt{\frac{2gcy}{b}}$, [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(AA)

Problema XI

$(M)ca\sqrt{\frac{cc^2}{2^2}+\frac{M}{2}}\ \frac{a}{2}\ \frac{cM}{2a} =$

$-ma^2\overline{b^2c^2}$ [illegible]

$b^2c^2.\ \overline{b^2c^2}$

[illegible] $(M)b^2.\ \overline{ab+cb} = \frac{ma^2 b\, \overline{b^2c^2}}{c.\ \overline{b^2c^2}}$

[illegible] $ma^2 cb^2c^2 + (M)\, ab\, \overline{ab+cb}$

$\frac{ma^2 cb^2c^2\ ma^2cc}{c.\ \overline{b^2c^2}}$

Poichè la azione dei pesi gm, gM, che generalmente si assumono, quando il punto K sta di mezzo fra i due Q, A, per $gmx + \frac{gmcy}{b}$; $\frac{gMcy}{b} - gMcz^2$, nel nostro caso di $AK = a = 0$ pareggiano la grandezza $\frac{gmcy}{b}$, $\frac{gMcy}{b}$, egli è chiaro dover essere non solo ~~x~~ $AB = x$ eguale a nulla, ma ancora $BQ = z$ eguale a nulla. Ora essendo $\frac{bx}{a} = z$, o sia $x = \frac{az}{b}$, se ne deduce $\frac{hx}{k} = y$, ~~o sia~~ $\frac{hz}{k}$ ~~a~~ o pure $z = \frac{bky}{ah}$; e $\frac{ahz}{bk} = y$; quindi egli è di uopo che sia $\frac{bk}{ah} = 0$ ovvero bk immensamente più piccola di ah, onde a qualsivoglia valore di y corrisponda sempre $z = 0$. Presa per mano la formola

$$\frac{(M)b^2\ \overline{ab+cb}\cdot x}{ma^2.\ \overline{b^2c^2} + (M)ab.\ \overline{ab+cb}} = \frac{hx}{k} = y$$

e dovendo essere $\frac{bk}{ah} = 0$, avremo

$$\frac{mab.\ \overline{b^2c^2} + (M)b^2.\ \overline{ab+cb}}{(M)b^2.\ \overline{ab+cb}} = 0, \text{ e perciò}$$

(M)

301

Problema XI.

$$(M) = -\frac{mab.\overline{b^2-c^2}}{b^2.\overline{ab+cb}} = -\frac{nmab.\overline{b^2-c^2}}{b^3c}$$

$$= -\frac{ma.\overline{b^2-c^2}}{b^2c}.$$

In questo incontro tanto $BQ = z$, quanto $Bm = y$, vanno pure lungo la linea AC; e non partendosi mai il corpo m dal punto A del canale AC, tanto che discendono essi congiuntamente per la direzione AC, resta sempre $BQ = z = a$, ed a $Bm = y$ può competere qualunque valore.

Corollario VIII.

Finalmente il punto k ascenda al di sopra del punto A, onde divenga $AK = -a$. Richiede una tale ipotesi, che nelle formole (24) (25) ~~si cangino~~ si seguiscalle ed in quelle che esprimono i valori di h, e di k, si cangino i segni delle lettere a, c. Sia per esempio $OK = \infty$; e giacchè ho dimostrato nel Corollario IX del Problema X. essere in detta ipotesi $(M) = 0$, o sia talmente minima, che $(M)\,ab^2.\overline{c-a}$ sia quantità trascurabile rispettivamente ad $ma^2.\overline{b^2-c^2}$, se ne deduce $h = 0$ in relazione a $k = \infty$. Quindi cancellati nelle formole (24) e (25) i termini in cui si trova la lettera h, ed altresì la k posta al confronto colla k^2, ~~troveremo~~

troveremo

troveremo dopo le convenienti espurgazioni

$$u = \sqrt{rgx \cdot \frac{ma^2+Mac}{ma^2+Mb^2}} = \sqrt{rgx}.$$

$$U = \sqrt{rgx \cdot \frac{mab^2+Mcb^2}{ma^3+Mab^2}} = \sqrt{rgx}.$$

L'ultima riduzione si ravvisa, perchè nella presente circostanza le quantità a, b, c sono adequatamente fra loro eguali, e perciò $\frac{ma^2+Mac}{ma^2+Mb^2} = 1$, $\frac{mab^2+Mcb^2}{ma^3+Mab^2} = 1$.

Problema XII.

Determinare le forze, che direttamente spingono i corpi m, M ne gli spazj MD, OD (fig. 5.)

Chiamate conforme il consueto f, F le forze, che spingono i corpi m, M per le direzioni AN, CK, ed essendo $MD = \sqrt{dx^2+dy^2-2dx\cdot\frac{cdy}{b}}$, $OD = dz - dy$, avremo per le note formole

$$\int f \cdot \sqrt{dx^2+dy^2-\frac{2cdxdy}{b}} = \frac{mu^2}{2}.$$

$$\int F \cdot \overline{dz-dy} = \frac{MU^2}{2}.$$

In luogo di u, U sostituisco i loro valori somministrati dalle equazioni 24, e 25, ed in cambio di dy, dz i valori pure dedotti dalla equazione $\frac{bdx}{a} = dz$ dedotta dalla (4.) $\frac{bx}{a} = z$, e dalla equazione (22)

$$\frac{(M)\, b^3\, \overline{ab-cb} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + (M)\, ab \cdot \overline{ab-cb}} = \frac{hx}{k} = y,$$ ed effettuata

la

Problema XII.

le necessarie operazioni, avremo

$$(29)\quad f=\frac{gm^2a^2\cdot\overline{bk-ch}+GMmac\cdot\overline{bk-ah}\,\sqrt{b^2k^2-2bchk+b^2h^2}}{ma^2b\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mb^2\cdot\overline{bk-ah}^2}$$

$$(30)\quad z=\frac{gmMa\cdot\overline{bk-ch}+GM^2c\cdot\overline{bk-ah}\cdot\overline{bk-ah}}{ma^2\cdot\overline{bk^2-2chk+bh^2}+Mb\cdot\overline{bk-ah}^2}$$

Non si scordi chi legge essere nella equazione ~~(cosa) (detta)~~ $c=\sqrt{\frac{N}{L}+\frac{e^2}{4L^2}}-\frac{e}{2L}$ (22)

$$\frac{(M)b^2\,\overline{ab-cb}\cdot x}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2}+(M)ab\cdot\overline{ab-cb}}=\frac{hx}{k}=y$$

il valore di $(M)=\sqrt{\frac{N}{L}+\frac{e^2}{4L^2}}-\frac{e}{2L}$, e che ~~lungamente~~ i valori di L, e, N stanno registrati verso il fine del Problema X. Le due formole 29, 30, che convengono alla fig. 5, agevolmente si adatteranno alle figure 6, 7, 8, 9 fatta la opportuna variazione nei segni di alcune quantità.

Corollario I.

Se $G=0$, onde il corpo M sia privo di gravità, si avverano le conseguenze stesse, che leggonsi nei Corollarj del Problema IX.

Corollario II.

Egli è lo stesso come se il triangolo ACK non fosse grave, qualora essendo $AK=c=0$, camminasse sopra un piano orizzontale. Conciossiachè in tal circostanza $(M)=M$, $h=Mab^3$, $k=ma^2b^2+Ma^2b^2$, sostituiti questi valori, e ridotto il calcolo si trova come nel Problema III

$$f=\frac{gma\sqrt{\overline{m+M}\cdot a^2+M^2b^2}}{\overline{m+M}\cdot a^2+Mb^2}\quad(4).$$

$z=$

Problema XII.

$$z = \frac{gmMab}{\overline{m+M}.a^2+Mb^2} \quad (10.)$$

Corollario III.

1 Fingendo = 0 la gravità g del corpo m, e giacchè

$$\int f\sqrt{dz^2+dy^2-\frac{2c}{b}dz\,dy} = \frac{fx}{k}\sqrt{\frac{bk^2-2chk+bh^2}{b}}$$

$$= \frac{mu^2}{2}$$

$$\int z.\overline{dz-dy} = zx\,\frac{bk-ah}{ak} = \frac{Mu^2}{2}$$

e per Corollario III del Problema XI

$$k = \frac{ma^2.\overline{b^2-c^2}.\overline{b^2-ac}}{a^2-2ac+b^2}$$

$$\frac{bk^2-2chk+bh^2}{b} = \frac{m^2a^4.\overline{b^2-c^2}^2}{a^2-2ac+b^2}$$

$$bk-ah = ma^2b.\overline{b^2-c^2},$$

$$\frac{bk-ah}{ak} = \frac{b.\overline{a^2-2ac+b^2}}{a.\overline{b^2-ac}},$$

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{GMma^2c.\overline{b^2-c^2}.\overline{a^2-2ac+b^2}.x}{ma^3.\overline{b^2-ac}.\overline{b^2-c^2}+Mab^2.\overline{b^2-ac}.\overline{a^2-2ac+b^2}}$$

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{GM^2b^2c.\overline{a^2-2ac+b^2}.x}{ma^3.\overline{b^2-ac}.\overline{b^2-c^2}+Mab^2.\overline{b^2-ac}.\overline{a^2-2ac+b^2}}$$

agevolmente scoprivansi

$$f = \frac{GMmac.\overline{b^2-ac}\sqrt{\frac{\overline{a^2-2ac+b^2}.\overline{b^2-c^2}}{b^2-ac}}}{ma^2.\overline{b^2-c^2}+Mb^2.\overline{a^2-2ac+b^2}}$$

$$z = \frac{GM^2bc.\overline{a^2-2ac+b^2}}{ma^2.\overline{b^2-c^2}+Mb^2.\overline{a^2-2ac+b^2}}.$$

2. Se AQ = a−c = 0, e conseguentemente a = c, ho notato nel Corollario III del Problema X, che il corpo m benchè non grave discende verticalmente. In tale ipotesi [illegible]

Problema XII.

$$f = \frac{GMma^2}{ma^2+Mb^2}\,,\quad \varphi = \frac{GM^2ab}{ma^2+Mb^2}$$

E perchè sarà $f : \varphi :: ma : Mb$, cioè le forze in ragion composta di quella delle masse m, M, e di quella degli spazj $QK = a = c$, $CK = b$ percorsi dai corpi nel tempo stesso.

3. Qualora (fig. 10) l'angolo ACK sia retto, onde si abbia $b^2 - ac = 0$, ne risulterà $f = \frac{GMm\sqrt{ac}}{\overline{m+M}\cdot a}$, $\varphi = \frac{GM^2\sqrt{ac}}{\overline{m+M}\cdot a}$ e perciò $f : \varphi :: m : M$. Ed in fatti essendo provato in questa circostanza nel Corollario III del Problema XI. $u = U$, le forze debbono stare come le masse.

4. Se pongasi $QK = c = 0$, la gravità del corpo M non può esercitare alcuna azione, e quindi si agguaglieranno a nulla le forze f, φ, che spingono i corpi per la direzione CK, o sia CA, Am, + i quali per conseguenza non ponno muoversi.

5. Che se il punto K si supponga situato (fig. 11.) fra i punti Q, A, diventa negativa la linea $QK = c$, a cui fa di uopo cangiare il segno, di modo che ne risulti

$$f = -\frac{GMmac\sqrt{\overline{a^2+2ac+b^2}\cdot\overline{b^2-c^2}}}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2} + Mb^2\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}$$

$$\varphi = -\frac{GM^2bc\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}{ma^2\cdot\overline{b^2-c^2} + Mb^2\cdot\overline{a^2+2ac+b^2}}$$

Le forze appariscono negative, perchè in vece di spingere per le direzioni AH, CK come nella fig. X, solleciteranno i corpi m, M per le direzioni contrarie (fig. 12)

Problema XII.

(fig. 12) HA, KC.

6. La linea CK coincida colla CA, onde sia $AK = a = 0$, nel qual incontro pel Corollario III del Problema XI num. 6 $u = 0$, $U = \sqrt{\frac{2Gcz}{b}}$, e scopriremo $f = 0$, $\varphi = \frac{GMc}{b}$, ossia $b : c :: GM : \varphi$ cioè $CK = CA = b : QK = QA = c :: GM : \varphi$, come realmente deve risultare dalla nota risoluzione della forza GM.

7. Ascenda il punto K (fig. 13.) al di sopra del punto A, e cangiato il segno alla costante a, ne proverrà

$$f = \frac{GMmac\sqrt{a^2-2ac+b^2 \cdot b^2-c^2}}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mb^2 \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}$$

$$\varphi = \frac{-GM^2bc \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + Mb^2 \cdot \overline{a^2-2ac+b^2}}$$

La forza f torna affermativa come supponemmo nella fig. X. a cagione che il corpo qualunque viene dimostrato anche dalla fig.ª 13 adattata alla ipotesi di a negativa, si muova in ambo le circostanze per la medesima direzione.

8. Standosi dentro i limiti del punto la linea AQ, QC, diventa AK infinita, le due costanti a, c, b si riducono adequatamente e addiverrà che sia adequatamente $QK = c = CK = b = AK = a$. Sostituisco a i loro valori finiti in cambio delle quantità $a^2-2ac+b^2 = \overline{AC}^2$, $b^2-c^2 = \overline{QC}^2$, e sarà

$$f = \frac{GMmac \cdot AC \cdot QC}{ma^2 \cdot \overline{QC}^2 + Mb^2 \cdot \overline{AC}^2}$$

$$\varphi = \frac{-GM^2bc \cdot \overline{AC}^2}{ma^2\overline{QC}^2 + Mb^2\overline{AC}^2}$$, e dividendo per

Problema XII.

per le quantità prossimamente uguali
ac, a^2, b^2, bc i numeratori, ed i
denominatori,

$f = \frac{GMm \cdot AC \cdot QC}{m\overline{QC}^2 + M\overline{AC}^2}$, $\varphi = -\frac{GM \cdot \overline{AC}^2}{m\overline{QC}^2 + M\overline{AC}^2}$

cioè le forze f, φ in ragion composta
di quella delle masse m : M, e di quella
di QC : AC, ~~delle velocità u, U~~
nel nostro caso in cui ~~che in tale proporzione~~ si riferiscono
le velocità u, U nel ~~per~~ del Corollario III del Problema
XI.

Corollario IV.

La medesima gravità stimoli
ambedue i corpi m, M, onde sia $g = G$
Conciossiachè abbia avvertito nel Corolla-
rio IV del Problema X., che in tre in-
contri il corpo m cala abbassa verti-
calmente, quando (fig. s.) $AQ = a - c = 0$,
quando a cagione dell'angolo retto
ACK $b^2 - ac = 0$, e quando il suddetto
angolo pareggia due retti, nel qual
terzo caso anche il corpo M discende per la
linea del piombo. Avendo determinato
nel Corollario IV del Problema XI le
velocità u, U nei mentovati tre
casi, ora vado in traccia delle forze
f, φ.

1. Nella prima supposizione di $a = c$
abbiamo $h = 0$, ~~[illegible]~~ e quindi
per le formole [illegible] 1, e 30

$$f = \frac{gma^2 \cdot \overline{m+M}}{ma^2 + Mb^2}$$

$$\varphi = \frac{gMab \cdot \overline{m+M}}{ma^2 + Mb^2}$$ in ragione composta

dalle

dalle masse m : M, e dalle velocità u : U, che in quella ipotesi stanno come a : b pel Corollario IV del Problema XI num. 2.

2. Il secondo caso di $b^2 = ac$ cangia (M) ... pel Corollario IV del Problema X, e per conseguenza $h = (M) b^2 ab - cb = 0$. Espurgata la formola 29, 30 ne risulterà

$$f = \frac{gma^2 + gMmac}{ma^2 + Mb^2}, \quad \varphi = \frac{gmMab + gM^2cb}{ma^2 + Mb^2} = \frac{gMb}{a} \cdot \frac{ma^2 + Mac}{ma^2 + Mb^2}$$

e giacchè $b^2 = ac$,

$f = gm$, $\varphi = \frac{gMb}{a}$. Si inferisca che quando l'angolo ACK è retto, tutto il peso gm s'impiega ad imprimere moto nella massa m, ed il peso gM nulla influendo nella velocità del corpo m, accelera soltanto la massa M, qualmente conforme ho notato nel Corollario IV. del Problema XI. num. 2.

3 Rimane da esaminarsi la terza ipotesi, quando l'angolo ACK (Fig. 15) si agguaglia a due retti, la quale richiede $AC = \sqrt{b^2 - c^2} = 0$, e conseguentemente $CK = b = QK = c = AK = a$. Da queste eguaglianze [illegible] deducesi $\varphi = gM$, ed opera di tali forze $f = gm$, [illegible] di imprimersi nelle masse m, M velocità pari u, U, conforme le ho ritrovate nel Corollario IV del Problema XI. num. 3.

Corollario V.

Qualora l'angolo ACK sia maggiore di un retto e minore di due, la forza f dipende dalla risoluzione di una

diversa forza maggiore di gm, e la forza z dalla risoluzione d'una forza minore di gM s'impiegando; il rimanente a crucolare la massa m. Se così piace a chi legge potrà adattare il calcolo a qualche caso particolare, ed io tralascio più volontieri questa fatica.

Corollario VI

Nel Corollario VI del Problema IX. ho avvertito, che quando il punto K (fig.) sta di mezzo fra i punti Q, A, si dà un caso, in cui il corpo M rimane immobile, il qual caso richiede, che si avveri la formola $\frac{h}{k} = \frac{b}{a}$ e per conseguenza $bk - ah = 0$. Cangiato il segno alla lettera c nella formola 29, e 30, cancellati i termini moltiplicati per $bk - ah$, e ponendo a in luogo di k, b in luogo di h, si scoprirà $f = gm \cdot \frac{a+c}{\sqrt{a^2+2ac+b^2}}$, $z = 0$

Rimanendo in tale incontro il corpo m per la linea AC, la forza f nasce dalla nota risoluzione del peso gm, dicendosi stare

$\sqrt{a^2+2ac+b^2} = AC : a+c = AQ ::$ gm : f forza che spinge per la direzione AC.

Corollario VII.

Divenuti $AK = a = 0$, ed avvertendosi pel Corollario VII del Problema X l'equazione $\frac{cbx}{a^2} = \frac{hx}{k} = y$; ci accorgeremo che

che k è non solamente infinitamente minore di h, ma ancora bk di ah. Il perchè nella formola 29, e 30 si muti il segno alla lettera c, si ponga G = g, e cancellati tutti i termini, nei quali c' entra k, si troverà dopo la necessaria espurgazione $f = \frac{gmc}{b}$, $F = -\frac{gMc}{b}$. In fatti essendo nel presente incontro u = U pel Corollario VII. del Problema XI., egli è di uopo che le forze, che spingono direttamente stieno come le masse. Non dia fastidio, che la forza F apparisca negativa; imperocchè sen= dosi per l'addietro considerata positiva la forza, che spingeva per la direzione C*, e spingendo nel caso presente la forza per la direzione contraria KC", egli è di uopo che sia affetta dal segno negativo.

Corollario VIII.

Ascenda il punto K sopra del punto A (fig. 9.), e questa ipotesi esige che nella formola 29, 30, ed in quelle che esprimono i valori di h, k si mutino i segni delle lettere a, c. Sia esempi= grazia QK = co, e conciossiachè abbia provato nel Corollario IX. del Problema X. essere in tal caso (M) = 0, e talmente × minima, che $(M)ab^2 \cdot \overline{c-a}$, possa trascu= rarsi rispettivamente ad $ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2}$ nella formola (22) $\frac{(M)\, b^3 \cdot \overline{c-a} \cdot x}{ma^2 \cdot \overline{b^2-c^2} + (M)\, ab^2 \cdot \overline{c-a}}$ $= \frac{hx}{k} = y$, se ne inferisca h = 0 in relazione a

× e di ~~molto~~ anche più $(M)\, b^3 \cdot \overline{c-a}$

371

Finita li 31 Luglio 1771

Problema XII.

a $k = \infty$. Per la qual cosa cancellati nella formola 29, 30 accomodata alla presente supposizione i termini ne' quali ha luogo la lettera h, ed altri la k posti al paragone colla k^2, ci si proverà dopo le necessarie operazioni

$$f = gm \cdot \frac{ma^2 + Mac}{ma^2 + Mb^2} = gm$$

$$F = -gM \cdot \frac{mab + Mcb}{ma^2 + Mb^2} = -gM$$

essendo adequatamente fra loro eguali le grandezze a, b, c, ne segue essere $\frac{ma^2 + Mac}{ma^2 + Mb^2} = \frac{mab + Mcb}{ma^2 + Mb^2} = 1$ e quindi si capisca la ragione dell'ultima riduzione. Discenderanno adunque i due corpi m, M liberamente per la linea del piombo colla velocità dei gravi cadenti, il che dalla sola considerazione della figura adattata alla ipotesi di $AK = \infty$ poteva agevolmente dedursi.

Della rissoluzione Cardanica
dell' equazioni di terzo grado
Dissertazione
stampata nel XXIV. T. pag. 170 del
Giornale de' Letterati d'Italia. Modena

Della Risoluzione Cardanica delle equazioni del terzo grado. Dissertazione Analitica del Signor Conte Giordano Riccati.

I. Ella è notissima la risoluzione Cardanica delle equazioni del terzo grado. Debbasi risolvere l'equazione $x^3 - px \pm q = 0$ mancante del secondo termine, alla qual forma si può ridurre qualunque proposta equazione. Faccio $x = m+n$, e trovo $x^3 = m^3 + 3mn\cdot(m+n) + n^3$. Sostituisco in cambio di $m+n$ il suo valore x, ed ho $x^3 = m^3 + 3mnx + n^3$, e quindi $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$. Paragonata questa formola colla proposta, trovo $3mn = p$; e per conseguenza $n = \frac{p}{3m}$, $n^3 = \frac{p^3}{27m^3}$. Scopro inoltre $m^3 + n^3 = \mp q$; e sostituito in cambio di n^3 il valore testè determinato, $m^3 + \frac{p^3}{27m^3} = \mp q$, o sia $m^6 + \frac{p^3}{27} = \mp qm^3$, e perciò $m^6 \pm qm^3 = -\frac{p^3}{27}$. Supplendo al quadrato, mi si presenta $m^6 \pm qm^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, e cavata la radice seconda, $m^3 \pm \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, e finalmente $m^3 = \mp \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$.

Essendo $m^3 + n^3 = \mp q$, se ad m^3 compete il valore $\mp \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, n^3 accetterà la grandezza $\mp \frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$. A cagione per altro di liberare le formole dalla soverchia moltiplicità dei segni del più e del meno, stabilisco $m^3 = \mp \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, $n^3 = \mp \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, onde ne risulti $x = m+n = \sqrt[3]{(\mp \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\mp \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

II. Le tre radici dell'equazione $x^3 - px \pm q = 0$ siano generalmente $x = m+n$, $x = u$, $x = t$. Mancando il secondo termine, dovrà essere $m+n+u+t = 0$, laonde $t = -m-n-u$. Nascerà dunque l'equazione $x^3 - px \pm q = (x-m-n)\cdot(x-u)\cdot(x+m+n+u) = x^3 + (-m^2 - 2mn - n^2 - mu - nu - u^2)\cdot x + m^2u + 2mnu + n^2u + mu^2 + nu^2 = 0$. Ma pel metodo Cardanico $3mn = p$; dunque $3mn = m^2 + 2mn + n^2 + mu + nu + u^2$, quindi $m^2 - mn + mu = -n^2 - nu - u^2$, e supplendo al quadrato, $m^2 - mn + mu + \frac{n^2 - 2nu + u^2}{4} = \frac{-3n^2 - 6nu - 3u^2}{4}$, ed estratta la radice $m - \frac{n+u}{2} = -(\frac{n+u}{2})\cdot\sqrt{-3}$, $m = \frac{n-u}{2} - (\frac{n+u}{2})\cdot\sqrt{-3}$.

Si raccoglie altresì dalla soprascritta equazione

n^2

$n^2+nu-nm = -u^2-mu-m^2$, e conseguentemente $n^2+nu-nm + \frac{u^2-2mu+m^2}{4} = \frac{-3u^2-6mu-3m^2}{4}$, e cavando la radice $n+\frac{u-m}{2} = \left(\frac{u+m}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$, $n = \frac{m-u}{2}+\left(\frac{u+m}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$.

Unito al valore di m quello di n, scopriremo, espurgata che sia la formola, $m+n = -2u+(m-n)\sqrt{-3}$, e facilmente ne dedurremo l'altre due radici

$u = -\frac{m-n}{2} + \left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$

$t = -\frac{m-n}{2} - \left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$. Dalla moltiplica di $m+n$ nel valore di u, e di un tal prodotto nel valore di t, ne risulta $\mp q = m^3+n^3$, come appunto richiede il metodo Cardanico

Avverto, che se avessi posta $\sqrt{\left(\frac{-3u^2-6mu-3m^2}{4}\right)} = -\left(\frac{u+m}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$, sarei pervenuto alla formola $n = \frac{m-u}{2}-(u+m)\cdot\sqrt{-3}$, e congiungendo questo valore con quello di m, avrei trovato dopo le opportune operazioni $\frac{m+n}{2}+u = -\left(\frac{m+n}{2}+u\right)\cdot\sqrt{-3}$, e dividendo per $\frac{m+n}{2}+u$, $1 = -\sqrt{-3}$, equazione assurda. La mia maniera di operare schiva gl'inconvenienti, e mi dà il giusto valore delle radici.

III. Posta $= A$ la metà della radice Cardanica $= \frac{m+n}{2}$, egli è certo essere $m = A+k$, $n = A-k$, onde ne risulti $m+n = 2A$. Noto, che per radice Cardanica dell'equazione $x = \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\left(\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\left(\mp\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$ intendo quella, che corrisponde a $\sqrt[3]{1} = 1$. L'altre due radici u, t della detta equazione si riferiscono, come vedremo, ai valori rimanenti di $\sqrt[3]{1} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Se l'equazione $x^3-px \pm q = 0$ è fornita di due radici eguali, abbiamo $k = 0$. Che se ad essa competono due radici ineguali, dato che queste siano reali, è $k = a\sqrt{-1}$, e se una sola è reale, e l'altre due immaginarie, diviene $k = a$. Ho già fatta la riflessione essere $m+n = 2A$. Nelle formole esprimenti i valori di u, e di t si pongano in cambio di m, e di n i loro valori $A+k$, $A-k$, e ci si presenterà $u = -A+k\sqrt{-3}$, $t = -A-k\sqrt{-3}$. Quando le tre radici dell'equazione $x^3-px\pm q = 0$ sono reali, ed ineguali, esser dee $k = a\sqrt{-1}$; imperciocchè in tal guisa il calcolo ci dà giustamente le tre reali, ed ineguali radici $m+n = 2A$, $u = -A-a\sqrt{3}$, $t = -A+a\sqrt{3}$. Nel caso delle due

radici

radici eguali annullandosi k, le tre radici accettano l'espressioni $m+n=2A$, $u=-A$, $t=-A$. Qualora finalmente una sola esser dee la radice reale, e due le immaginarie, abbiamo $k=a$; e quindi $m+n=2A$, $u=-A+a\sqrt{-3}$, $t=-A-a\sqrt{-3}$, che in fatti sono tre radici ineguali, una reale, e due immaginarie.

IV. Supponendosi nella proposta formola $x^3-px\pm q=0$, p, q quantità reali, è necessario nella circostanza di $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$, che sia u grandezza mista di reale, e di immaginario; imperocchè se fosse per esempio $u=y\sqrt{-1}$, ne risulterebbe dalla moltiplicazione delle tre radici $(x-m-n)\cdot(x-y\sqrt{-1})\cdot(x+m+n+y\sqrt{-1})$ la formola $x^3-(m^2+2mn+n^2-y^2+(m+n)\cdot y\sqrt{-1})\cdot x+(-m-n)\cdot y^2+(m^2+2mn+n^2)\cdot y\sqrt{-1}=x^3-px\pm q=0$, nella quale p, e q sarebbero grandezze immaginarie. Si renda adunque indispensabile nell'ipotesi di $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$, che siano

$u=\frac{-m-n}{2}+\left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}=-A+a\sqrt{-3}$,

$t=\frac{-m-n}{2}-\left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}=-A-a\sqrt{-3}$ quantità mista di reale, e di immaginario. Ma l'espressioni per m, e per n di u, e di t hanno da divenire reali, quando $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, ed $m+n$ ha da esser sempre grandezza reale; dunque $\frac{m-n}{2}$ deve uguagliarsi ad una quantità immaginaria, onde moltiplicata per $\sqrt{-3}$ dia una quantità reale. Ciò si ottiene col metodo Cardanico, in cui $m=A+a\sqrt{-1}$, $n=A-a\sqrt{-1}$, $\left(\frac{m-n}{2}\right)\sqrt{-3}=a\sqrt{-1}\sqrt{-3}=-a\sqrt{3}$, e finalmente $u=-A-a\sqrt{3}$, $t=-A+a\sqrt{3}$. Si inferisca esser necessario nell'ipotesi di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, che m, ed n siano quantità miste di reale, e di immaginario; qualmente le determina la risoluzione Cardanica.

V. Ho asserito al numero III., che i valori di u, e di t dipendono dalle due radici cubiche dell'unità $\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$. E veglia il vero, nella supposizione di $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$ si moltiplichi $A+a=m$ per $\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, ed $A-a=n$ per $\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, e ne nasceranno i prodotti

$m'=\frac{-A+A\sqrt{3}\sqrt{-1}-a+a\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$

$n'=\frac{-A-A\sqrt{3}\sqrt{-1}+a+a\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, che congiunti in una somma mi danno $m'+n'=x=u=-A+a\sqrt{3}\sqrt{-1}$, come sopra. Per avere il valore di t, si moltiplichi $A+a=m$ per $\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, ed $A-a=n$ per $\frac{-1+3\sqrt{-1}}{2}$, e ne risulteranno i due prodotti

$m'' = \frac{-A - A\sqrt{3}\sqrt{-1} - a - a\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$

$n'' = \frac{-A + A\sqrt{3}\sqrt{-1} + a - a\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, che uniti insieme determinano giustamente $m'' + n'' = x = t = -A - a\sqrt{3}\sqrt{-1}$.

Che se $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, si otterrà il valore di u moltiplicando $A + a\sqrt{-1} = m$ per $\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, ed $A - a\sqrt{-1} = n$ per $\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, ed i prodotti

$m' = \frac{-A + A\sqrt{3}\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} - a\sqrt{3}}{2}$

$n' = \frac{-A - A\sqrt{3}\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} - a\sqrt{3}}{2}$ raccolti in una somma si agguaglieranno a $m' + n' = x = u = -A - a\sqrt{3}$. Scopriremo il valore di t moltiplicando $A + a\sqrt{-1} = m$ per $\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, ed $A - a\sqrt{-1} = n$ per $\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, onde ne nascano i due prodotti

$m'' = \frac{-A - A\sqrt{3}\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} + a\sqrt{3}}{2}$

$n'' = \frac{-A + A\sqrt{3}\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} + a\sqrt{3}}{2}$, il cui aggregato ci dà

$m'' + n'' = x = t = -A + a\sqrt{3}$. Il perchè avremo

$$x = \begin{cases} 2A \\ -A \pm a\sqrt{3}\sqrt{\mp 1} \\ -A \mp a\sqrt{3}\sqrt{\mp 1} \end{cases}$$

, che sono le tre radici della proposta equazione del terzo grado $x^3 - px \pm q = 0$, le quali comprendono tutti i casi. Se $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, vagliono i segni superiori; se $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, essendo $a = 0$; e se $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ dovranno hanno da prescegliersi i segni inferiori.

VI. Poichè nella ipotesi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ ho dimostrato essere uno dei valori di $m = A + a\sqrt{-1}$, avremo $A \pm a\sqrt{-1} = \sqrt[3]{\left(\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}\cdot\sqrt{-1}\right)}$. Alzando al cubo trovo $A^3 + 3A^2a\sqrt{-1} - 3Aa^2 - a^3\sqrt{-1} = \mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}\sqrt{-1}$, formola, in cui devonsi agguagliare le quantità reali alle reali, le immaginarie alla immaginaria, dimodochè ne provenga $A^3 - 3Aa^2 = \mp\frac{1}{2}q$, e per conseguenza $a = \sqrt{\left(\frac{A^3 \pm \frac{1}{2}q}{3A}\right)}$, $3A^2a - a^3 = \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)}$

Non si è ancora scoperto, e secondo ciò che rifletterò al numero XII. non si scoprirà mai il metodo generale di estrarre la radice terza della quantità $\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^3\right)}\cdot\sqrt{-1}$ fornita dalla condizione, che siano algebraici i valori della

specie

specie A, a. L'Abate Vincenzo Riccati mio fratello nel Tomo I de' suoi Opuscoli alla pag. 129., e seguenti ha insegnato l'artificio di cavare la radice cubica dalla sovrascritta grandezza, quando $\frac{1}{2}q = \frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}\cdot\frac{(3b^2-1)}{(1+b^2)\cdot\sqrt{(1+b^2)}}$, nella qual formola b può essere un numero razionale, od irrazionale. Questa equazione si disponga così $-\frac{1}{2}q = \frac{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}{(1+b^2)\cdot\sqrt{(1+b^2)}} - \frac{3\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}}\cdot\frac{b^2\cdot\frac{1}{3}p}{1+b^2}$. Fatto $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} = A$, $\frac{b\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} = a$, ne risulta $-\frac{1}{2}q = A^3 - 3Aa^2$. Esaminiamo presentemente se questi stessi valori ci vengano somministrati dalla formola $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}$ sostituito che sia messo in luogo di $\frac{1}{2}q$ il suo valore, che ci dà $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3\cdot\frac{(9b^4-6b^2+1)}{(1+b^2)^3}$, e $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3\cdot\left(1-\frac{(9b^4-6b^2+1)}{(1+b^2)^3}\right)$. Effettuati i necessarj computi, scopriremo $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)} = \frac{3\cdot\frac{1}{3}p}{1+b^2}\cdot\frac{b\cdot\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} - \frac{b^3\cdot\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}{(1+b^2)\cdot\sqrt{(1+b^2)}}$. Stabilito come sopra $\frac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt{(1+b^2)}} = A$, $\frac{b\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} = a$, troveremo giustamente $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)} = 3A^2a - a^3$. Per la qual cosa $A = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}}$ sarà la metà della radice dell'equazione del terzo grado $x^3 - px + \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}\cdot\frac{(3b^2-1)}{(1+b^2)\cdot\sqrt{(1+b^2)}} = 0$. In fatti, come prova l'Abate Vincenzo mio fratello, $m = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} + \frac{b\cdot\sqrt{\frac{1}{3}p}\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+b^2)}}$ è radice cubica di $-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\cdot\sqrt{-1}$ nell'ipotesi di $\frac{1}{2}q = \frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}\cdot\frac{(3b^2-1)}{(1+b^2)\cdot\sqrt{(1+b^2)}}$, e nella stessa ipotesi $n = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}} - \frac{b\cdot\sqrt{\frac{1}{3}p}\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+b^2)}}$ radice terza di $-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\sqrt{-1}$. Quindi ne viene per conseguenza la radice Cardanica $x = m + n = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt{(1+b^2)}}$.

L'altre due radici della nostra equazione $x^3 - px \pm q = 0$ sono $x = \frac{-\sqrt{\frac{1}{3}p} \mp b\sqrt{p}}{\sqrt{(1+b^2)}}$. Questi valori si ricavano e dalla formola

$u = \frac{-m-n}{2} + \left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$

$t = \frac{-m-n}{2} - \left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$, come altresì dal moltiplicare $A + a\sqrt{-1} = m$ per $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $A - a\sqrt{-1} = n$ per $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Ho già detto di sopra al numero III., che 1, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ sono le tre radici cubiche dell'unità.

Dall'ipotesi di $b^2 = 1$ ne proviene $x^3 - px + \frac{1}{3}p\sqrt{\frac{2}{3}p} = 0$, ch'è l'equazione risolta da M. Nicole, la cui radici $x = \sqrt{\frac{2}{3}p}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{6}p} - \sqrt{\frac{1}{2}p}$; $x = -\sqrt{\frac{1}{6}p} + \sqrt{\frac{1}{2}p}$.

VII.

VII. Il ch. Sig. Colonnello Cav. Anton-Mario Lorgna ha inviata all'Accademia di Bologna una Dissertazione; in cui risolve le due formole $x^3 - px + \frac{p}{6}\sqrt{(\frac{b-1}{6}\cdot p)} = 0$, $x^3 - px - \frac{p}{6}\sqrt{(\frac{b-1}{6}\cdot p)} = 0$ e farò sopra entrambe alcune riflessioni.

E primieramente la radice Cardanica della prima formola è $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{(b-1)}$, e l'altre due radici $x = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{(b-1)} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{p}{6}(b+3))}$. Quindi $A = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{p\cdot(b-1)}{6})}$, e poichè $A^3 - 3Aa^2 = -\frac{1}{2}q$, e per conseguenza $\frac{\sqrt{(A^3+\frac{1}{2}q)}}{\sqrt{3A}} = a$, sostituiti i valori di A, e di q, troveremo $a = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+3}{36}))}$. Avremo pertanto $m = A + a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))} + \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+3}{36}))}\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\sqrt{-1})}$ nell'ipotesi di $q = \frac{p}{6}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))}$, e similmente $n = A - a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))} - \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+3}{36}))}\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\sqrt{-1})}$, onde ne risulti $x = m+n = 2A = \sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))}$, ed inoltre $x = u = -A - a\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))} - \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+3}{6}))}$, $x = t = -A + a\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-1}{6}))} + \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+3}{6}))}$.

Alla seconda formola $x^3 - px - \frac{p}{6}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} = 0$ corrispondono le tre radici, cioè la Cardanica $x = \sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))}$; e le altre due $x = -\frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{6}))}$. Avverto, che per ottenere, che la nostra equazione sia fornita di tre radici reali, egli è necessario, che b non sia minore di 3. Essendo $A = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{(p(\frac{b+1}{6}))}$, ed $a = \frac{\sqrt{(A^3 - \frac{1}{2}q)}}{\sqrt{3A}}$, surrogati i valori di A, e di q, ne nascerà $a = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{36}))}$. Per la qual cosa sarà $m = A + a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} + \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{36}))}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\cdot\sqrt{-1})}$ nella supposizione di $q = \frac{p}{6}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))}$, ed altresì $n = A - a\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} - \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{36}))}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}\cdot\sqrt{-1})}$, e ne proverrà $x = m+n = \sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))}$; $x = u = -A - a\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} - \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{6}))}$; $x = t = -A + a\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b+1}{6}))} + \frac{1}{2}\sqrt{(p\cdot(\frac{b-3}{6}))}$.

Le radici u, t delle due equazioni sciolte dal Sig. Lorgna si possono ancor ottenere mediante le due radici cubiche dell'unità $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ coll'artificio da me spiegato al numero V.

Afferma il lodato Autore nella sua dottissima Esercitazione Analitica del Caso Irreducibile del terzo grado, e

della

dalle Serie infinite di aver risolte molte altre formule, e M. di Alembert nei Comentarj dell' Accademia di Berlino dell' anno 1746. ha dimostrato potersi esprimere algebraicamente le radici di quelle equazioni del terzo grado $x^3 - px + q = 0$, nelle quali $\frac{1}{27}p^3$ sta ad $\frac{1}{4}q^2$ in ragione duplicata dell' angolo $\frac{K \cdot 360^0}{2^n}$, ovvero $\frac{K \cdot 360^0}{2^n \cdot 5}$.

VIII. Egli è noto, che chiamato φ un arco di cerchio, il cui raggio $= r$, si verifica l'equazione $2Cc.\frac{1}{3}\varphi = \frac{(Cc.\varphi + \sqrt{-1}\,Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}}}{r^{-\frac{2}{3}}} + \frac{(Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}}}{r^{-\frac{2}{3}}}$. Questa formola è simile alla Cardanica $x = (\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{-1}\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)})^{\frac{1}{3}} + (\mp\frac{1}{2}q - \sqrt{-1}\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)})^{\frac{1}{3}}$. Fatto il paragone, seguendo le traccie dell' Ab. Vincenzo Riccati suo fratello nel suo Tomo I. di Opuscoli pag. 81., si ponga $\mp\frac{1}{2}q = \frac{Cc.\varphi}{r^{-2}} = r^2 Cc.\varphi$, $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)} = \frac{Sc.\varphi}{r^{-2}} = r^2 Sc.\varphi$, e ne proverrà $\frac{1}{4}q^2 = r^4(Cc.\varphi)^2$, $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2 = r^4(Sc.\varphi)^2$, e per conseguenza $\frac{1}{27}p^3 = r^4((Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2)$: ma $(Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2 = r^2$; dunque $\frac{1}{27}p^3 = r^6$, e finalmente $r = \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Avremo pertanto $x = 2Cc.\frac{1}{3}\varphi$, e perciò $\frac{1}{2}x = A = Cc.\frac{1}{3}\varphi$, purchè il seno tutto sia $= \sqrt{\frac{1}{3}p}$, $Cc.\varphi = \frac{\mp\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$, e conseguentemente $Sc.\varphi = \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p}$. Avendo sopra scoperto al numero VI. $a = \sqrt{\left(\frac{A^3 \pm \frac{1}{2}q}{3A}\right)}$, ed essendo dato il valore di $A = Cc.\frac{1}{3}\varphi$ nelle supposizioni testè notate, è parimente determinato il valore di $a = \sqrt{\left(\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^3 \pm \frac{1}{2}q}{3Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \pm \frac{\frac{1}{2}q}{3Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$.

Abbiamo dunque l'espressione di x libera dalla quantità immaginaria, e ci è riuscito di scoprire altresì la

$$\sqrt[3]{(\mp\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)}.\sqrt{-1})} = A + a\sqrt{-1} = m = Cc.\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{\left(\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \pm \frac{\frac{1}{2}q}{3Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}.\sqrt{-1}.$$

Sarà similmente

$$\sqrt[3]{(\mp\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)}.\sqrt{-1})} = A - a\sqrt{-1} = n = Cc.\tfrac{1}{3}\varphi - \sqrt{\left(\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \pm \frac{\frac{1}{2}q}{3Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}.\sqrt{-1}.$$

Benchè l'espressione di x dipenda generalmente dalla curva dei coseni circolari, io credo che ci possiamo chiamar contenti, quando anche con tal mezzo ci liberiamo dall' imbarazzo della grandezza immaginaria. Notisi, che nell' ipotesi di $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$ ci sono infiniti casi nei quali la $\sqrt[3]{(\mp\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$ non si può estrarre in numeri, nè deter=

minarsi

381.

minarsi x parimente in numeri senon per approssimazione. Cotali casi sono analoghi a quelli, in cui, sendo $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, il valore di x non può ottenersi algebraicamente. Se ricorrendo alla tavola dei seni, determiniamo il valore di x con egual approssimazione; non vedo qual utile possa ricavare il tentar di movere passi ulteriori per una strada, al di cui termine non è concesso di pervenire.

IX. Non tralascio di riflettere, che nella circostanza di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ le altre due radici dell'equazione $x^3 - px \pm q = 0$ (chiamata c la circonferenza del circolo, il cui raggio $\sqrt{\frac{4}{3}p}$) sono $x = u = 2Co.\left(\frac{\varphi + c}{3}\right)$, $x = t = 2Co.\frac{\varphi + 2c}{3}$; perché agli archi $\varphi + c$, $\varphi + 2c$ non meno che all'arco φ, compete lo stesso coseno $= \mp\frac{\frac{1}{2}q}{r^2}$. Progredendo agli archi $\varphi + 3c$, $\varphi + 4c$ &c. non si trovano nuove radici, scoprendosi agevolmente essere $2Co.\left(\frac{\varphi + 3c}{3}\right) = 2Co.\frac{\varphi}{3}$, $2Co.\left(\frac{\varphi + 4c}{3}\right) = 2Co.\left(\frac{\varphi + c}{3}\right)$, $2Co.\left(\frac{\varphi + 5c}{3}\right) = 2Co.\left(\frac{\varphi + 2c}{3}\right)$, $2Co.\left(\frac{\varphi + 6c}{3}\right) = 2Co.\frac{\varphi}{3}$, e così di seguito, dimodoché tornansi sempre ad incontrare le medesime tre radici.

I valori delle radici u, t si possono ancora determinare o col mezzo delle due radici terze dell'unità $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, o col mezzo delle formole $u = \frac{-m-n}{2} + \left(\frac{m-n}{2}\right).\sqrt{-3} = -A - a\sqrt{3}$, $t = \frac{-m-n}{2} - \left(\frac{m-n}{2}\right).\sqrt{-3} = -A + a\sqrt{3}$. Sostituiti i valori di m, e di n, di A, e di a, ci si presenterà

$$x = u = -Co.\frac{\varphi}{3} - \sqrt{\left((Co.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Co.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$$

$$x = t = -Co.\frac{\varphi}{3} + \sqrt{\left((Co.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Co.\frac{1}{3}\varphi}\right)}.$$

Paragonati questi valori coi già scoperti $u = 2Co.\frac{\varphi + c}{3}$, $t = 2Co.\frac{\varphi + 2c}{3}$, agevolmente si inferisce

$$2Co.\frac{\varphi + c}{3} + Co.\frac{\varphi}{3} = -\sqrt{\left((Co.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Co.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$$

$$-2Co.\frac{\varphi + 2c}{3} - Co.\frac{\varphi}{3} = -\sqrt{\left((Co.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Co.\frac{1}{3}\varphi}\right)},$$

e per conseguenza

$Co.\frac{\varphi}{3} + 2Co.\frac{\varphi + c}{3} = -Co.\frac{\varphi}{3} - 2Co.\frac{\varphi + 2c}{3}$; e finalmente

$2Co.\frac{\varphi}{3} + 2Co.\frac{\varphi + c}{3} + 2Co.\frac{\varphi + 2c}{3} = 0$, il che è verissimo; perché

perchè sendo priva del secondo termine l'equazione del terzo grado, la somma delle sue tre radici deve uguagliarsi al nulla.

X. Per porre in uso la tavola dei seni, si rifletta, che essendo $Se.\,\varphi = \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p}$ nel circolo del raggio $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, se faremo $\sqrt{\frac{1}{3}p} : \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p} :: 1 : \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$, il quarto termine sarà il seno dell'arco, che chiamo φ', relativamente alle tavole, che suppongono il raggio $r' = 1$; il qual arco è simile al φ. Conseguentemente anche $Co.\,\frac{1}{3}\varphi'$ sarà simile a $Co.\,\frac{1}{3}\varphi$. E perchè l'analogia $1 : \sqrt{\frac{1}{3}p} :: Co.\,\frac{1}{3}\varphi' : Co.\,\frac{1}{3}\varphi$ determinerà $Co.\,\frac{1}{3}\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,Co.\,\frac{1}{3}\varphi'$. Trovato dunque nella tavola l'arco φ' corrispondente al seno $= \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$, ed al coseno $\mp \frac{\frac{1}{2}q}{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$, si divida esso in tre parti, e si indaghi nel modo, che additerò, il suo $Co.\,\frac{1}{3}\varphi'$, il quale moltiplicato per $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ dà il prodotto $\sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,Co.\,\frac{1}{3}\varphi' = Co.\,\frac{1}{3}\varphi$, valore, che duplicato s'eguaglia alla radice Cardanica $= x$.

Premessa l'avvertenza, che supponendosi φ' l'arco più picciolo, a cui competono i sovrascritti seno, e coseno, non può lo stesso esser maggiore di $\frac{1}{2}c'$, chiamata c' la circonferenza relativa al raggio $r' = 1$. Non contenendosi nelle tavole i coseni, facilmente si determinerà $Co.\,\frac{1}{3}\varphi'$, riflettendo essere $Co.\,\frac{1}{3}\varphi' = Se.\,(\frac{1}{4}c' - \frac{1}{3}\varphi)$.

Si scoprirà il valore della radice $x = 2\,Co.\,\frac{\varphi + c}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,2\,Co.\,\frac{\varphi' + c'}{3}$, se all'arco φ' già trovato nella tavola si aggiungerà la circonferenza c'. Dividasi l'arco $\varphi' + c'$ in tre parti, e si renderà noto $Co.\,\frac{\varphi' + c'}{3} = -\,Se.\,(\frac{\varphi' + c'}{3} - \frac{1}{4}c')$, e quindi $Co.\,\frac{\varphi + c}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,Co.\,\frac{\varphi' + c'}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,-\,Se.\,(\frac{\varphi' + c'}{3} - \frac{1}{4}c') = \frac{1}{2}x$.

Poichè ... $Co.\,\frac{\varphi + 2c}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}p}\,.\,Co.\,\frac{\varphi' + 2c'}{3} = \frac{1}{2}x$, se $\frac{\varphi' + 2c'}{3}$ sarà eguale, o minore di $\frac{3}{4}c'$, troveremo $Co.\,\frac{\varphi' + 2c'}{3} = -\,Se.\,(\frac{3}{4}c' - \frac{\varphi' - 2c'}{3})$. Che se fosse $\frac{\varphi' + 2c'}{3} > \frac{3}{4}c'$, ne risulterebbe $Co.\,\frac{\varphi' + 2c'}{3} = Se.\,(\frac{\varphi' + 2c'}{3} - \frac{3}{4}c')$. Riesce molto semplice la dimostrazione delle addette espressioni dei coseni per i seni, ed io la lascio all'industria di chi legge.

Cui

Col mezzo della tavola adunque si renderanno note le tre radici dell'equazione $x^3 - px \pm q = 0$ nell'ipotesi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, che saranno date dai valori

$$x = \begin{cases} 2\,Co.\,\frac{\varphi}{3} \\ 2\,Co.\,\frac{\varphi + c}{3} \\ 2\,Co.\,\frac{\varphi + 2c}{3} \end{cases}$$

supposte le condizioni, che sia $= \sqrt{\frac{4}{3}p}$ il raggio del circolo; che il seno degli archi φ, $\varphi + c$, $\varphi + 2c$ sia $= \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p}$, e che perciò il coseno degli archi predetti sia $= \frac{\mp \frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$.

XI. Potrebbe cadere in sospetto, che avendo supposto $Se.\,\varphi = \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p}$, e non piuttosto $Se.\,\varphi = \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}}{\frac{1}{3}p}$, io non abbia con totale generalità maneggiato il problema. Fra i due minimi archi φ, che richiedono i detti seni positivo, o negativo, e che hanno comune il coseno, il primo dee stare fra il nulla ed il semicircolo, il secondo fra il semicircolo, ed il circolo, e quanto quello cala dal semicircolo, altrettanto questo dee superarlo. Perciò i due archi si potranno segnare così $\frac{1}{2}c - z$, $\frac{1}{2}c + z$, ed aggiungendo ad essi c, $2c$, egli è d'uopo cercare i coseni dei due ternarj d'archi

$$\frac{\frac{1}{2}c - z}{3}, \quad \frac{\frac{3}{2}c - z}{3}, \quad \frac{\frac{5}{2}c - z}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}c + z}{3}, \quad \frac{\frac{3}{2}c + z}{3}, \quad \frac{\frac{5}{2}c + z}{3},$$

e provare, che i coseni del secondo ternario non sono diversi da quelli del primo. Ripetuta la riflessione, che due archi, ch'egualmente differiscono dal semicircolo o calando, o crescendo, richiedono lo stesso coseno; cerchiamo la differenza dei sovrascritti sei archi dal semicircolo. Avremo dunque

$$\frac{\frac{1}{2}c - z}{3} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}z, \quad \frac{\frac{3}{2}c - z}{3} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}z, \quad \frac{\frac{5}{2}c - z}{3} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}z;$$

$$\frac{\frac{1}{2}c + z}{3} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}z, \quad \frac{\frac{3}{2}c + z}{3} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}z, \quad \frac{\frac{5}{2}c + z}{3} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}z.$$

Paragonati i predetti archi, ci accorgeremo, ch'egualmente in senso contrario differiscono dal semicircolo gli archi

$\frac{\frac{1}{2}c - z}{3}$, $\frac{\frac{5}{2}c + z}{3}$; $\frac{\frac{3}{2}c - z}{3}$, $\frac{\frac{3}{2}c + z}{3}$; $\frac{\frac{5}{2}c - z}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}c + z}{3}$, e che per conseguenza richiedono gli stessi coseni; di modo che sendo

$$Co.\,\frac{\frac{1}{2}c - z}{3} = Co.\,\frac{\frac{5}{2}c + z}{3}; \quad Co.\,\frac{\frac{3}{2}c - z}{3} = Co.\,\frac{\frac{3}{2}c + z}{3}, \quad Co.\,\frac{\frac{5}{2}c - z}{3} = Co.\,\frac{\frac{1}{2}c + z}{3},$$

non si trova nessuna nuova radice, qualmente richieda l'

equazione

equazione del terzo grado, che dee esser fornita di tre sole radici.

XII. Da quanto finora ho scritto manifestamente deducesi, che nella formola Cardanica debbano aver necessariamente luogo le quantità immaginarie nella circostanza di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, acciocchè l'equazione $x^3 - px \mp q = 0$ sia fornita di tre radici reali; e che al contrario le grandezze immaginarie hanno da esser escluse dalla predetta formola, quando essendo $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, la sola radice Cardanica è reale, e l'altre due immaginarie.

Che perciò nei casi $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ essendo

$$m = \sqrt[3]{\left(\mp \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2\right)}\sqrt{-1}\right)} = \tfrac{1}{2}x + a\sqrt{\pm 1}$$

$$n = \sqrt[3]{\left(\mp \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2\right)}\sqrt{-1}\right)} = \tfrac{1}{2}x - a\sqrt{\pm 1}$$

, avremo costantemente $m + n = x$, cioè la radice Cardanica quantità reale.

Che in numero infinito di incontri sono algebraiche l'espressioni di x, come chiaramente dimostrano le formole di M. Nicole, di mio fratello, del Sig. Lorgna, e di M. d'Alembert, benchè spettino alla supposizione di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$.

Ma che nella mentovata ipotesi rimangono innumerabili formole, nelle quali ci dobbiamo appagare di espressioni trascendenti, che mediante l'ajuto delle tavole dei seni riescono utili quanto l'algebraiche, qualora in queste le radici non si possono estrarre salvo che per approssimazione.

Dipendendo i valori di x generalmente, quando $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, dalla curva dei coseni circolari, ch'è trascendente, egli è assolutamente impossibile, che tutti ricevano espressioni algebraiche; perchè in tal caso la detta curva sarebbe algebraica, e non trascendente. Questa riflessione fa chiaramente toccar con mano, che gli Analisti debbono rimaner soddisfatti della generale risoluzione del caso chiamato irreducibile col mezzo dei coseni circolari, e che riuscirà sempre inutile qualunque sforzo di scioglierlo universalmente col mezzo di quantità algebraiche.

Lettera del Signor Conte Giordano Riccati al Signor Abate Giuseppe Contavalli intorno alle Riflessioni su la verità di alcuni Paradossi Analitici, creduti comunemente Paralogismi contenute nei Num.ri I. e II. del Giornale Letterario dai Confini dell'Italia

M.DCC.LXXXIV.

stampata nel Tomo XXVIII. del Giornale di Modena

pag. 256.

Lettera del Signor Conte Giordano Riccati al Signor Abate Giuseppe Contarelli intorno alle Riflessioni su la verità di alcuni Paradossi Analitici, creduti comunemente Paralogismi contenute nei Num.ri I. e II. del Giornale Letterario dei Confini dell'Italia M.DCC.LXXXIV.

Un Dotto Anonimo sostiene, che certi risultati di calcolo considerati come paralogismi, non siano finalmente che meri paradossi, senza nulla contenere di erroneo. Io ragionerei soltanto Signor Abate Riveritissimo di quei paradossi, ch'egli attribuisce al Co. Vincenzo mio fratello, ed a me, nominandoci entrambi con espressioni di somma bontà, e gentilezza. E quanto a me, ecco le sue parole.

« Un largo fonte di trasformazioni si è la famiglia delle quantità
« immaginarie. I recenti Analisti, che hanno introdotto nell'Analisi
« tali quantità anfibie unicamente per un maneggio più agevole, ed
« elegante delle equazioni, malgrado la loro cautela, lo spontaneo
« e legittimo progresso del calcolo li ha condotti ad eguagliare il reale
« all'immaginario. Non è tanto raro di incontrare esempj di questo
« genere nelle opere dei recenti Analisti. Non tutti però gli Analisti
« sono caduti negligentemente in tali equazioni, ma con avvertenza
« riconoscendone la verità. Singolare è l'esempio del .... Signor
« Conte Giordano Riccati, che si incontra nella sua Dissertazione
« Della Risoluzione Cardanica dell'Equazioni del terzo grado.
« Tomo XXIV. Giornale di Modena al § 9. diretta a dimostrare
« l'impossibilità della soluzione algebraica. Posto φ arco del cerchio
« del raggio r, c circonferenza di cerchio di raggio $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e la
« equazione $x^3 - px \pm q = 0$, si dica: agevolmente si inferisca
« $2\,\text{Co.}\,\frac{\varphi+c}{3} + \text{Co.}\,\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\left(\frac{(\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3}$
« $-2\,\text{Co.}\,\frac{\varphi+2c}{3} - \text{Co.}\,\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\left(\frac{(\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3}$ &c.
« Ognun vede (riflette l'Autore) che in queste equazioni si pone il
« reale uguale all'immaginario; perchè nel primo membro i
« valori sono certamente reali; nel secondo poi si ha
« $\sqrt{\left(\frac{(\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3} = \sqrt{\left((\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2 \mp \frac{\frac{1}{2}q}{\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{\left(-(\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi}\right)}$, in
« cui se anche nel primo caso si voglia supporre $(\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi)^2 < \frac{1}{2}q$, nell'
« altro dai segni tutti negativi, nasce necessariamente l'immaginario. »

Pochi sono quegli Analisti, che leggendo una Dissertazione, si

vogliano

vogliano prender la pena di rifare i calcoli. Se il ch. Anonimo gli avesse incontrati, si sarebbe accorto, ch'è scorso sbaglio nelle due equazioni, e ch'esse vanno riformate così

$$2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3} + Cc.\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\left(-\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3}$$

$$-2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3} - Cc.\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\left(-\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3}$$. e poichè

$$\sqrt{\left(-\frac{(Cc.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3} \mp \frac{\frac{1}{2}q}{3\,Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-3} = \sqrt{\left(-(Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \mp \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-1} = -\sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}.$$

avremo le nostre equazioni ridotte al giusto

$$2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3} + Cc.\frac{\varphi}{3} = -\sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$$

$$-2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3} - Cc.\frac{\varphi}{3} = -\sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$$. Ho premesso all'omogeneo di comparazione il segno $-$; perchè nascendo dal prodotto di due quantità immaginarie, un tale prodotto esser dee negativo.

Dalle dette formole si deducono queste altre due

$$2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3} = -Cc.\frac{\varphi}{3} - \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)},$$

$$2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3} = -Cc.\frac{\varphi}{3} + \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 \pm \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$$, le quali contengono due diverse espressioni, la prima di $2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3}$, la seconda di $2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3}$ relative alle formole $x^3 - px + q = 0$, $x^3 - px - q = 0$.

Mi permetta lo stimat.^mo Signor Abate, che con un esempio ponga in chiaro competere ad ambe l'espressioni un valore reale. Abbiasi l'equazione $x^3 - px + q = x^3 - 7x + 6 = 0$, le cui tre radici $2\,Cc.\frac{\varphi}{3} = 2$, $2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3} = -3$, $2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3} = 1$. Ed in fatti ponendo in essa in vece di x l'una, o l'altra delle tre grandezze $2, -3, 1$, rettamente si annulla, e moltiplicando insieme le tre radici $x-2=0$, $x+3=0$, $x-1=0$, ne risulta la predetta equazione. Sostituiti in cambio di $Cc.\frac{1}{3}\varphi$, e di q i loro valori, trovo

$$-Cc.\tfrac{1}{3}\varphi - \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 + \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)} = -1 - \sqrt{\left(1 + \tfrac{3}{1}\right)} = -3 = 2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3};$$

$$-Cc.\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 + \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)} = -1 + \sqrt{\left(1 + \tfrac{3}{1}\right)} = 1 = 2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3}.$$

Se l'equazione fosse $x^3 - 7x - 6 = 0$, sarebbe fornita delle tre radici $2\,Cc.\frac{1}{3}\varphi = 3$, $2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3} = -2$, $2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3} = -1$, e giustamente si scoprirebbe

$$-Cc.\frac{\varphi}{3} - \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 - \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)} = -\frac{3}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{\frac{3}{2}}\right)} = -2 = 2\,Cc.\frac{\varphi+c}{3},$$

$$-Cc.\frac{\varphi}{3} + \sqrt{\left((Cc.\tfrac{1}{3}\varphi)^2 - \frac{\frac{1}{2}q}{Cc.\frac{1}{3}\varphi}\right)} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{\frac{3}{2}}\right)} = -1 = 2\,Cc.\frac{\varphi+2c}{3}$$. Ella vede dunque sparire il paradosso, che il reale si agguagli all'

immaginario

immaginario; e quindi senza più passo ad esaminare i paradossi attribuiti all'Ab. Vincenzo mio fratello.

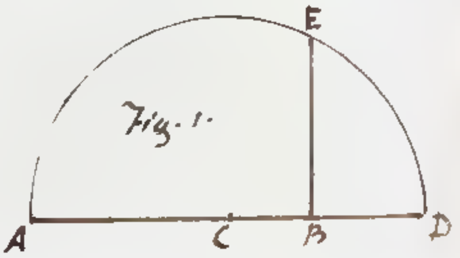
Avendo questi (T. 1. Lib. 2. Cap. 3. pag. 130 delle Istituzioni Analitiche) trovata immaginaria l'espressione dell'asse coniugato dell'iperbola, soggiunge: *Nihilominus ut analogiam cum ellipsi servemus, signa quantitatis sub radicali existentis immutamus*, ed in effetto cangia i segni del radicale immaginario senza cangiare il segno esterno, che rimane positivo. E qui osserva il Sig. Anonimo, che non poteva mutare i segni interni del radicale immaginario senza intenderlo moltiplicato per $\sqrt{-1}$, che avrebbe dovuto dare un prodotto negativo secondo la comune regola. Ora ritenendo il segno esterno positivo, viene tacitamente a supporre $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = 1$. Ella a prima vista comprende, che la risposta è facilissima. Per cangiare i segni interni del radicale senza alterare il segno esterno, egli è di uopo moltiplicare per $-\sqrt{-1}$, e ciò posto si avrà giustamente $-\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = 1$. Muta similmente l'Ab. Vincenzo i segni interni d'un radicale senza variare il segno esterno nel T. 2. Lib. 1. Cap. 12. § 16. pag. 198. delle predette Istituzioni, ed anche a questo luogo si applica l'allegata risposta. Pretende inoltre il Sig. Anonimo, che mio fratello in sostanza confermi la formola $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = 1$. nel Lib. 1. Cap. 5. delle Istituzioni alla pag. 40. 41. 42. Avverte l'Ab. Riccati, che due date formole binomie immaginarie divengono reali, qualora si moltiplicano, o si dividono per $\sqrt{-1}$. Reca in esempio la formola $\sqrt{(\frac{a\beta}{2} + a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)})} - \sqrt{(\frac{a\beta}{2} - a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)})}$, che alzata al quadrato diviene $\frac{a\beta}{2} + a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)} - 2\sqrt{(\frac{a^2\beta^2}{4} - \frac{a^2\beta^2}{4} + a^2c^2)} + \frac{a\beta}{2} - a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)} = a\beta - 2ac$. Avremo dunque $\sqrt{(\frac{a\beta}{2} + a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)})} - \sqrt{(\frac{a\beta}{2} - a\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - c^2)})} = \sqrt{(a\beta - 2ac)} = \sqrt{(2ac - a\beta)}.\sqrt{-1}$ quantità immaginaria, supponendosi $c > \frac{\beta}{2}$, la quale si tramuta in reale dividendola, o moltiplicandola per $\sqrt{-1}$. Nel primo caso ci si presenta $x = \frac{\sqrt{(2ac - a\beta)}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{(2ac - a\beta)}$, e nel secondo $x = \sqrt{(2ac - a\beta)}.\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -\sqrt{(2ac - a\beta)}$, che sono amendue quantità reali. Non si varierebbe il segno esterno della radice moltiplicandola per $-\sqrt{-1}$; e quindi x nell'uno, e nell'altro caso riceverebbe lo stesso valor reale $= \sqrt{(2ac - a\beta)}$, ottenendosi lo stesso effetto o dividendo per $\sqrt{-1}$, o moltiplicando per la grandezza $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$.

Sembrami

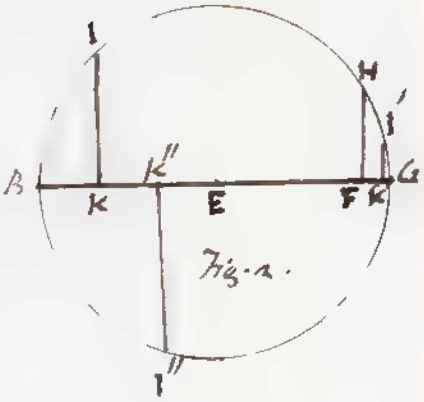
Sembrami Signor Abate Stimat.mo, che le osservazioni nella presente Lettera contenute bastino per dileguare i paradossi, che il ch. Sig. Anonimo suppone ammessi dal Co. Vincenzo mio fratello, e da me, e crederò di non ingannarmi, se avrò favorevole il suo giudizio. Registro qui sotto la serie degli errori corsi nella mentovata mia Dissertazione, e delle loro correzioni, supplicandola di farla imprimere insieme con questa Lettera in codesto Giornale.

Costruzione delle due formole
$x^3 - px + q = 0$, $x^3 - px - q = 0$
nell'ipotesi che sia $p = 7$, $q = 6$.

Per descrivere il circolo, il cui raggio $r = \sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{\frac{7}{3}}$, trovo prima geometricamente $\sqrt{\frac{7}{3}}$. Nella retta (Fig. 1) AD segno $AB = \frac{7}{3}$, $BD = 1$, e divisa AD per metà in C, onde sia $AC = \frac{5}{3}$, col raggio AC descrivo il circolo AED, e tirata la ordinata AE, sarà questa $= \sqrt{\frac{7}{3}}$.

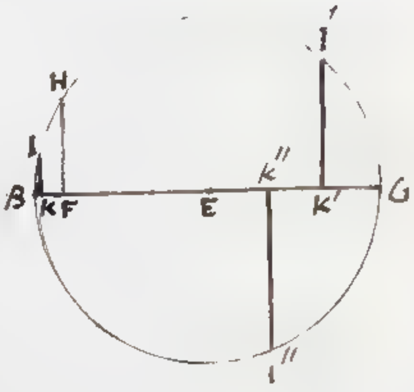


Col raggio adunque (fig. 2) $BE = \sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ delineo il circolo BIHGI''B. La prima formola esige, che sia $\text{Co.}\,\varphi = -\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p} = \frac{-3}{\frac{7}{3}} = -\frac{9}{7}$. Segue pertanto $EF = -\frac{9}{7}$, e condotta la ordinata FH, si determina l'arco $BIH = \varphi$. Sia $BI = \frac{1}{3}\varphi$, e menata IK normale a BG, ne risulta $EK = \text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi = 1$, ch'è la metà della radice Cardanica $x = 2\,\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi = 2$ della prima formola $x^3 - 7x + 6 = 0$.



Per ottenere le altre due radici, all'arco $BI = \frac{1}{3}\varphi$ si aggiungano (chiamata c la circonferenza del circolo BIHGI''B) gli archi $II' = \frac{1}{3}c$, $II'I'' = \frac{2}{3}c$, e tirate le ordinate $I'K'$, $I''K''$, si avrà $EK' = \text{Co.}\,\frac{\varphi + c}{3} = -\frac{3}{2}$, $EK'' = \text{Co.}\,\frac{\varphi + 2c}{3} = \frac{1}{2}$, che sono le metà delle due radici cercate $x = 2\,\text{Co.}\,\frac{\varphi + c}{3} = -3$, $x = 2\,\text{Co.}\,\frac{\varphi + 2c}{3} = 1$.

Passo alla costruzione della formola $x^3 - 7x - 6 = 0$. Tornato a descrivere il circolo del raggio (fig. 3) $BE = \sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{\frac{7}{3}}$, segno $EF = \text{Co.}\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p} = \frac{3}{\frac{7}{3}} = \frac{9}{7}$, e descritta la ordinata FH determino l'arco $BIH = \varphi$. Taglio $BI = \frac{1}{3}\varphi$, e col mezzo della ordinata IK ho $KE = \text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi = \frac{3}{2}$, ch'è la metà della radice Cardanica $x = 2\,\text{Co.}\,\frac{1}{3}\varphi = 3$ della seconda formola $x^3 - 7x - 6 = 0$. Aggiunti a BI gli archi $II' = \frac{1}{3}c$, $II'I'' = \frac{2}{3}c$, avremo $EK' = \text{Co.}\,\frac{\varphi + c}{3} = -1 = \frac{1}{2}x$, $EK'' = \text{Co.}\,\frac{\varphi + 2c}{3} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$, che sono le metà delle altre due radici della nostra formola.



pag.
172.
173.
1.4.
175.
176.
177.
178
180.
[illegible]
182.
[illegible]

Errori scorsi nella Dissertazione del Sig. Co. Giordano Riccati Della Risoluzione Cardanica dell'Equazioni del terzo grado, ch'è contenuta nel Tomo XXIV. di questo Giornale.

pag.	linea	Errori.	Correzioni
172.	14.15.	$\left(\frac{n+u}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$	$-\left(\frac{n+u}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$
173.	2.3	$\left(\frac{-u-m}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$	$+(u+m).\pm\sqrt{-3}$
	6	$(m-n).\pm\sqrt{-3}$	$(m-n).\pm\sqrt{-3}$
	11.	q	$\mp q$
	14.	$\left(\frac{u+m}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$	$-\left(\frac{u+m}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$
174.	1.	$+\left(\frac{u+m}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$	$-\left(\frac{u+m}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$
	4.	$\left(\frac{m+n}{2}+u\right).\pm\sqrt{-3}$	$-\left(\frac{m+n}{2}\right)\pm\sqrt{-3}$
	5.	$1=\pm\sqrt{-3}$	$1=\mp\sqrt{-3}$
	12.13	$\pm\frac{1}{2}q$	$\mp\frac{1}{2}q$
175.	11.	$\mp\sqrt{-3}$	$\mp k\sqrt{-3}$
	16.	$\pm a\sqrt{3}$	$\mp a\sqrt{-3}$
		$\mp a\sqrt{3}$	$\pm a\sqrt{3}$
176.	9.	$-2mn$	$+2mn$
177.	5.	$-A$	A
	7.8	$\pm a\sqrt{3}$	$\mp a\sqrt{3}$
	8.	$\mp a\sqrt{3}$	$\pm a\sqrt{3}$
	1..	$\pm a\sqrt{3}\sqrt{\pm1}$	$\mp a\sqrt{3}\sqrt{\pm1}$
	14.	$\mp a\sqrt{3}\sqrt{\pm1}$	$\pm a\sqrt{3}\sqrt{\pm1}$
178	2.	$-\frac{A+A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{-1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}}{2}$	$-\frac{A+A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$
	3.	$-\frac{A-A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}}{2}$	$-\frac{A-A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$
	10.	$-\frac{A-A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{3}\sqrt{\pm1}}{2}$	$-\frac{A-A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{\pm1}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$
	1..	$-\frac{A+A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}}{2}$	$-\frac{A+A\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\pm\frac{a\sqrt{\pm1}}{2}\mp\frac{a\sqrt{\pm1}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$
[illegible]	1.	$-A+a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}$	$-A\pm a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}$
		$-A-a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}$	$-A\mp a\sqrt{3}\sqrt{\mp1}$
	5.	$\frac{1}{27}p^2$	$\frac{1}{27}p^3$
180.	4.	al Num. XI.	al Num. XII.
[illegible]	11.	$\frac{-b^3.\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}}}{(1+b^2).\sqrt{(1+b^2)}}$	$\frac{-b^3.\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}{(1+b^2).\sqrt{(1+b^2)}}$
182.	5.	$+\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$
[illegible]	7.	$\pm\frac{b\sqrt{p}}{\sqrt{(1+b^2)}}$	$\mp\frac{b\sqrt{p}}{\sqrt{(1+b^2)}}$
	9.	$+\left(\frac{-m+n}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$	$+\left(\frac{m-n}{2}\right).\pm\sqrt{-3}$

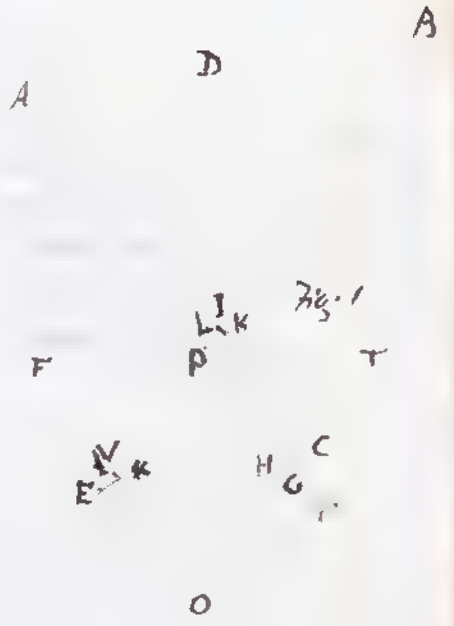
183.	10.	$+\left(\frac{-m+n}{2}\right)\cdot\pm\sqrt{-3}$	$-\left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\pm\sqrt{-3}$
	6.	$+\sqrt{\frac{1}{3}p}$	$+\sqrt{\frac{1}{2}p}$
		$-\sqrt{\frac{1}{3}p}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}p}$
185.	1.	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{6}\cdot(6+3)\right)}$	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{6}\cdot(6+3)\right)}$
186.	4.	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(p\cdot\left(\frac{6-3}{6}\right)\right)}$	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\left(p\cdot\left(\frac{6-3}{6}\right)\right)}$
189.	3.4.7.	$\pm\frac{1}{2}q$	$\mp\frac{1}{2}q$
190.	4.	$\pm\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$	$\mp\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$
	6.9.	$\mp\frac{1}{2}q$	$\pm\frac{1}{2}q$
191.	1.	$\mp\frac{1}{2}q$	$\pm\frac{1}{2}q$
	5.8.	$\pm\frac{1}{2}q$	$\mp\frac{1}{2}q$
	7.10.	$\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3}\mp\frac{\frac{1}{2}q}{3\,\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$	$\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3}\pm\frac{\frac{1}{2}q}{3\,\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\cdot\sqrt{-1}$
192.	4.	$\pm\frac{1}{2}q$	$\mp\frac{1}{2}q$
193.	6	$\pm\frac{\frac{1}{2}q}{r^2}$	$\mp\frac{\frac{1}{2}q}{r^2}$
194.	4.	$\frac{-m-n}{2}\cdot\sqrt{-3}$	$\frac{-m-n}{2}-\left(\frac{m-n}{2}\right)\cdot\sqrt{-3}$
	6.	$+\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3}\pm\frac{\frac{1}{2}q}{3\,\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\sqrt{-3}$	$-\sqrt{\left((\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2\pm\frac{\frac{1}{2}q}{\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$
	7.	$-\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3}\mp\frac{\frac{1}{2}q}{3\,\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\sqrt{-3}$	$+\sqrt{\left((\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2\pm\frac{\frac{1}{2}q}{\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$
195.	1.3.	$\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2}{3}\mp\frac{\frac{1}{2}q}{3\,\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}\sqrt{-3}$	$-\sqrt{\left((\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi)^2\pm\frac{\frac{1}{2}q}{\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi}\right)}$
196.	9.	$\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi'=\sqrt{\frac{1}{3}}\varphi'$	$\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi-\sqrt{\frac{1}{3}p}\cdot\mathrm{Cc}.\frac{1}{3}\varphi'$
197.	1.	$\frac{\pm\frac{1}{2}q}{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$	$\frac{\mp\frac{1}{2}q}{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$
	13.	$\mathrm{Sc}.\left(\frac{1}{4}c-\frac{1}{3}\varphi'\right)$	$\mathrm{Sc}.\left(\frac{1}{4}c',-\frac{1}{3}\varphi'\right)$
199.	12.	$\pm\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$	$\mp\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$

Lettera all' Ornatissimo
P. D. Fran.co M.a Franceschinis Barnabita
stampata in fine della Dissertazione
Della tensione delle funi
in Bassano
1784

NB. Nel commercio di lettere del N. A.
dell'anno suddetto nel mese d'Ottobre
v'ha oltre a questa una seconda
Lettera

Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati all'Ornatissimo Padre D. Francesco Maria Franceschinis Barnabita Professore di Matematica nella Università di Bologna.

La bellissima vostra Dissertazione della Tensione delle Funi, Ornatissimo Padre, che con grandissima mia obbligazione mi avete fatto l'onore di indirizzarmi, io l'ho letta con tutta l'attenzione, e con tanto maggior piacere, quanto che ho chiaramente scorto, che in essa sostenete la verità. Attaccata la funicella ADB (fig. 1) a due punti fissi A, B, per cui possa scorrere liberamente il peso P descrivendo un'elisse, si fermerà questo nel punto più basso D, in cui la tangente della elisse è orizzontale. La verticale PO esprima il peso P: la linea OP prorogata in D dividerà l'angolo APB in due parti uguali, essendo tali gli angoli APF, APT per la nota proprietà dell'elisse. Il peso PO si può in due maniere risolvere, continuando sempre la retta AP verso E, e conducendo pel punto O OV parallela ad AP, ovvero OE normale a AP. Giusta la prima risoluzione, che giustamente sostenete essere la genuina, la linea PV dinota la tensione sofferta dalla funicella BP, e giusta la seconda prescelta dal dottissimo Ab. Frisio la detta funicella soffre la tensione PE. Quantunque Voi difendiate in moltissime guise, e tutte conchiudenti la vostra sentenza, permettetemi, che con due nuovi raziocinj vie più la confermi.



Prolungo AP verso E, che s'intersecherà in G con OG parallela a AP, a cui meno normale PC, e ad indi compio il parallelogrammo PGCI. Sia, secondo l'opinione del Chiarissimo Ab. Frisio PE la tensione della funicella BP, e vediamo qual sia l'ufficio della forza EO = PC. Non essendo PG in linea retta con AP, fa di uopo risolverla nelle due, PG nella direzione di AP, che

mendo

traendo da P verso G, si eguaglia alla tensione della cordicella AP; PI, (= GC, nella direzione di PB) che traendo da P verso I, minora la tensione della cordicella BP. Si eguagliava pertanto essa tensione a PE − PI: ma PI = VE; dunque resterà = PV la tensione della funicella AP, ed essendo PV = PG, si scoprivanno le giuste misure delle vere tensioni delle due cordicelle ~~[illegible]~~.

* Passo al secondo raziocinio dedotto dal sig. [illegible] suo metodo delle azioni. Ai chiodi A, B si sostituiscano due girelle, intorno alle quali si pieghino le cordicelle PAQ, PBR, da cui pendano i pesi eguali Q, R, che formino equilibrio col peso P. Si supponga che il peso P discendendo pel minimo spazio verticale Pp, faccia ascendere i due pesi Q, R dimodochè la cordicella passi alla situazione qApBr. Coi raggi AP, BP si descrivano gli archetti Pm, Pn. Essendo eguali gli angoli APD, BPD, saranno adequatamente tali anche gli angoli mpP, npP; e perchè i triangoli mpP, npP sono rettangoli, ed hanno il lato comune Pp, se ne deduce la loro perfetta uguaglianza, e specialmente quella dei lati omologhi mp, np. I pesi adunque Q, R sono ascesi per eguali spazi Qq = mp, Rr = np, ed hanno esercitate le azioni negative Q.Qq, R.Rr, mentre il peso P ne ha esercitata una positiva P.Pp. Richiede l'equilibrio che l'azione positiva P.Pp si eguagli alla somma delle negative, onde mutuamente si impediscano, nè segua moto. Avremo dunque $P.Pp = Q.Qq + R.Rr = 2Q.Qq = 2Q.mp$; e per conseguenza $\frac{P}{2}.Pp = Q.mp$; e passando all'analogia $\frac{P}{2} : Q :: mp : Pp$. Si descriva il parallelogrammo PVOGP come nella fig. 1, e si tiri la retta VG che taglierà PO = P in due parti eguali e ad angoli retti nel punto K. L'angolo mpP è uguale all'angolo APD; ma questo si eguaglia al ~~[illegible]~~ KPG; dunque nei

triangoli

triangoli rettangoli mpP, KPG sono eguali gli angoli mpP, KPG, e perciò passa fra loro similitudine, donde che si avrà l'analogia
$mp : pP :: KP : PG : ma\ mp : pP :: \frac{1}{2}P : Q$; $KP = \frac{1}{2}P$ come sopra ho provato
dunque $\frac{1}{2}P : Q :: \frac{1}{2}P : PG$, e perciò $Q = PG$. E conciossiachè il peso Q si agguagli alla tensione della funicella AP, una tale tensione verrà espressa da PG. In simil modo si dimostrerà $= PV$ la tensione della cordicella AP. Ed ecco messa in nuovo chiarissimo lume la legge delle tensioni delle funicelle AP, BP.

Quando Voi, Stimo Padre, considerate quelle posizioni (Fig. 3.) della corda APB, nelle quali la tangente al punto P dell'elisse non è orizzontale, supponete ~~~~, che il peso P non possa scorrere lungo la corda. Cotali posizioni saranno permanenti, quando qualora la corda APB non esca fuori delle verticali AQ, BR. Assegnata per esempio ad essa la positura AP'B, il peso P' discenderebbe nella verticale BR, e se la corda AP fosse (che finora si è considerata ~~non pesante~~ priva di gravità ~~~) dotata di un peso minimo rispettivamente al grave P, si adatterebbe ad una catenaria. Abbia pertanto la corda APB una posizione permanente, e tirata la verticale $PO = P$, e prolungate le rette AP, BP si delinei il parallelogrammo PVOG, e si tirino le orizzontali GK, VL. Sarà ~~pertanto~~ PG la tensione della corda AP, che farà equilibrio colla porzione PK del peso P, e PV la tensione della corda BP, che farà equilibrio col residuo $PL = KO$ del detto peso. Se ai chiodi A, B si sostituiscano due girelle, farà di mettervi per mantener l'equilibrio, che sia il peso $Q = PG$, il peso $R = PV$, il che si può ancor dimostrare ponendo in opera il metodo delle azioni.

Da quanto ho scritto chiaramente comprendete

Ornatissimo

Ornatissimo Padre, [essere io penetrato] dalla verità della sentenza che sostenete. Se ha tanto pregio la Dissertazione da Voi pubblicata, non avrà certamente minor merito il Metafisico Lavoro, al quale la vostra salute, e le continue ~~applicazioni~~ [occupazioni] non vi hanno permesso di dar compimento. Io desidero bensì, che promoviate le scienze col vostro raro talento, ma nello stesso tempo vi consiglio ad aver cura della vostra preziosa salute, la quale resa stabile e perfetta, vi darà campo di produrre frutti ben degni ~~d'un~~ [ornatissimo] ingegno ~~distinto~~ di Voi.

Aggiunta al segno *

Si ~~potrebbe~~ [può] osservare, che la forza PC = EO si ~~dovrà~~ [deve anche essa] risolvere col metodo dell'Ab. Frisio, conducendo ad APG la normale CH, onde ne risulti la tensione PH minore di PG della della corda AP. Dato compimento al parallelogrammo PHCK, e tirata KL a squadra di AP, la forza PK, che tira da P verso K, si risolve nelle due PL < PI, che diminuisce la tensione della corda AP, ed LK, che nuovamente risolta nella stessa guisa, determina una forza minore di HG, che aumenta la tensione della corda AP. Continuando le risoluzioni, ne nascono due [infinite] serie, una di scemamenti di tensione della corda AP, e l'altra di accrescimenti di tensione della corda AP; le somme delle quali si uguagliano ad EV, HG, dimodoché si determinano le vere uguali tensioni PV, PG, benché si sia ammesso il modo di risolvere prescelto dal celebre Ab. Frisio.

Del centro di
osculazione

Dissertazione I.

nel Tomo XXXIII. pag. 140
del Giornale di Modena
1786.

Questa dissertazione fu primieramente composta gli anni 1735, 1736. Nell'anno presente 1755 l'Autore l'ha corretta e migliorata, e condotta a termine il decimo giorno di Luglio.

Del centro di oscillazione:

Dissertazione 1. [illegible]

Intorno le proprietà de' pendoli semplici, e composti tante e sì varie cose si sono state insegnate da Uomini nelle scienze fisico-matematiche peritissimi, che pare nulla più potersi aggiungere, e che la materia abbia ricevuto il suo intero compimento. Con tutto ciò essendomi passati per la mente alcuni ragionamenti in tale proposito, ho creduto bene di estenderli, e di pubblicarli, sì perché mettono in vista alcune verità d'ora non avvertite, come pure perché mi aprivano la strada a dimostrare con un metodo assai semplice molte proposizioni già conosciute.

Lemma 1°

Due pendoli semplici sono fra loro isocroni, ogni volta che le distanze dal centro di sospensione si trovano essere in ragione composta, diretta delle forze tangenziali sollecitanti, e reciproca delle masse, che si debbono mettere in moto.

La dimostrazione dipende dalle note equazioni fondamentali del moto $f\,dt = m\,du$, $F\,dT = M\,dU$. Per le due specie f, F s'intendono quelle forze tangenziali sollecitanti, che derivate dalla gravità assoluta, e moltiplicate nelle respettive masse operano per archetti minimi giusta la direzione delle toccanti. Colle lettere m, ed M poi si esprimono quelle masse, alle quali debbe imprimersi il moto. Supposto l'isocronismo abbiamo $dt = dT$; dunque $f : F :: m\,du : M\,dU$ o sia $\frac{f}{m} : \frac{F}{M} :: du : dU$. Ed essendoché nella nostra ipotesi gli elementi delle velocità du, dU serbano la ragione delle distanze dal centro di sospensione, o vero de' raggi r, R; perciò $\frac{f}{m} : \frac{F}{M} :: r : R$; il che &c.

403

Corollario 2.

Osserverassi il mentionato isocronismo, e per un solo istante, se nel seguente si muta la proporzione assegnata, o continuamente, se si mantiene costante.

Corollario 2

il cui peso eserciti azione, ch'io chiamo massa posta in moto, ch'io chiamo
Se la massa, agente, non è diversa dalla parte resistente, come nei pendoli semplici oscillanti nel vacuo; allora si ottiene l'isocronismo quando le forze tangenziali dipendenti dalla gravità costante seguano la ragione delle distanze dal centro di sospensione, senza che si computino né punto né poco le masse.

Corollario 3.

Che se le masse moventi non sono una cosa medesima colle mosse, in tal caso ricorrendo al nostro Lemma generale, per non cadere inavvedutamente in paralogismo, fa di mestieri determinare accuratamente per una parte l'azione, e per l'altra l'effetto.

Scolio.

Per darne un esempio, mi faccio a considerare il metodo tenuto dal celebre Sig.r Giovanni Bernoulli nel soddisfare al seguente Problema. Nelle Memorie della Real Accademia di Francia per l'anno 1714. alla pagina 274. della edizione di Amsterdam cioè cercare la lunghezza AG (fig. 1.) di un pendolo semplice isocrono al composto BAC di braccia eguali ma opposte, che compongono una linea retta, con i pesi ineguali C maggiore e B minore attaccati alle estremità della leva CAB. Questo pendolo ottimamente da lui si suppone tautocrono al semplice AC, nel di cui punto C fossero unite ambe le masse C, B, la prima con una gravità positiva, che tende all'ingiù, e la seconda

alta

atta a sollevarsi alli insù con una gravità negativa. Quindi posta P.G la forza sollecitante del corpo qualunque G, trovo quella del mentovato pendolo AC uguale a $\overline{C-B}\cdot P$: e perchè questa forza mette in moto le due masse C+B, restituisce la seguente analogia

$$\frac{\overline{C-B}\cdot P}{C+B} : \frac{G\cdot P}{G} :: AC : AG$$

che mi dà l'equazione $\frac{C+B}{C-B}\cdot AC = AG$

Sin qui cammina bene il discorso, ma dubito assai, che il lodato Autore proceda con passo egualmente franco nell'applicare la sua dottrina ai pendoli oscillanti nel fluido, nei quali siccome computa con aggiustatezza la massa agente, così prende sbaglio nella potenza, essendosi, non so come, scordato della massa fluida cacciata di luogo dal moto della ghianda solida.

Problema 2.

Dato di lunghezza, e di posizione un pendolo semplice, trovare tutti gli altri posizionati semplici ad esso isocroni nel primo istante del moto.

Costruzione.

Sia dato il pendolo AB (Fig. 2.) di lunghezza e di posizione. Dal punto estremo B della verga AB, in cui sta concentrata la massa della ghianda B, si conduca la normale BD, che tagli l'orizzontale AD nel punto D, ed intorno il diametro AD si descriva il circolo ABDA; io dico, essere questa la curva locale, che soddisfà al Problema proposto; conciochè segnato nella sua circonferenza qualivoglia punto C ad arbitrio, e tirata dal centro di ~~oscillazione~~ sospensione A la corda AC, determinerà essa la

posizione

posizione, e la corrispondente lunghezza di un pendolo semplice fornito di qualunque massa isocrono al dato AB nel primo momento del loro moto.

Dimostrazione.

La verticale BQ si faccia eguale alla orizzontale AD, per cui esprimo la gravità assoluta di qualunque peso, ed istituita la risoluzione delle forze col metodo ordinario, prorogando cioè AB in e, e conducendo dal punto Q sopra la Be la perpendicolare Qe, si determinerà essa la forza tangenziale della ghianda B in B. Ora essendo simili i due triangoli DAB, BQe, ed AD = BQ, avremo altresì Qe = AB. Nella stessa maniera dimostreremo AC = Hh forza tangenziale del peso C in C; dunque serbando le forze tangenziali Qe, Hh la ragione delle distanze dal centro di sospensione AB, AC, i due pendoli semplici per il corollario 2. del premesso Lemma saranno isocroni nel principio del loro moto, il che &c.

Corollario 1.

Congiunti i due pendoli semplici AB, AC in un composto BAC, ne seguirà, che le due ghiande B, C nel principio della discesa saranno naturalmente fra loro isocrone, del qual termine io mi servirò in avvenire ogni qual volta una ghianda non influisca nè punto nè poco nel moto dell'altra, come nel caso nostro succede, ad ognuna di esse senza ajuto della compagnia è atta a descrivere archi simili maneggiabili in tempi pari.

Corollario 2.

Se il peso K raccomandato alla verga AK cade dentro del circolo delineato, darà sempre ajuto all'altro B; conciossiachè prorogata la linea AK in G, se nel pendolo composto AKG il grave K, come è noto, e come agevolmente si dice dal Corollario 2. del Lemma 1., accelera

l'altro

l'altro G; tolto di mezzo G, egli è manifesto, che la media K sarà lo stesso con B.

Tutto l'opposito interverrà quando il corpo N sarà collocato fuori del cerchio. Nel pendolo composto AGN venendo N ajutato da G, sarà parimente ajutato da B, e da qualunque altro corpo posto nella parte della nostra curva locale.

Corollario 3°.

O qui ci si apre la strada di mettere qualsivoglia pendolo composto di due pesi BAC in positura tale, che nel contemporaneamente della caduta le due gravità B, C non si ajutino né si contrastino, onde siano naturalmente isocrone.

Descrivasi un cerchio che passi per i tre punti A, C, B, e condotto il diametro AD per il punto di sospensione A, si giri se fa di bisogno il predetto cerchio in maniera che il suo diametro AD acquisti la posizione orizzontale, ed in tal caso per le cose dimostrate si otterrà il dimandato isocronismo.

Lemma 1.

Posto che diasi il pendolo semplice AG (Fig. 3) contemporaneamente isocrono al composto BAC; dico che la direzione della verga del primo necessariamente passerà per il centro di gravità K del secondo.

Se il pendolo semplice AG, la cui verga passa per il centro di gravità K del pendolo composto BAC, non è ad esso isocrono, convenga ad un altro di questa proprietà, ma di differente direzione AD. Collochisi il pendolo composto BAC nella positura BAC, di modo che i due pesi B, C siano in equilibrio, ed il pendolo stia in riposo. In tal sito il loro centro di gravità K sarà nella

verticale

verticale AG, altrimenti se fosse fuori di essa avrebbe a discendere per acquistare il luogo più basso. Il pendolo dunque semplice Ad sarà fuori della verticale, e dovrà indispensabilmente muoversi all'in giù, mentre il suo supposto isocrono bAc è in istato di quiete, il che è un manifesto assurdo contro l'ipotesi.

Problema 2.

Determinare la lunghezza di un pendolo semplice isocrono ad un dato composto di due pesi.

Costruzione.

Per il punto di sospensione A (fig. 2.) del pendolo composto BAC, e per gli altri due C, B, in cui si suppongono concentrate le masse C, B, facciasi passare il circolo ACBD, indi segnato il punto K centro di gravità dei due pesi C, B, si tiri la retta AK, la quale si prolunghi fino a tanto che vada a tagliare la circonferenza del cerchio descritto nel punto G; dico essere AG la lunghezza cercata del pendolo semplice isocrono al composto BAC.

Dimostrazione.

Abbia il nostro pendolo composto la positura prescritta nel Corollario 3. del Problema 1. ed in tal caso il pendolo composto BAC, ed il semplice AG saranno fra loro isocroni nel primo istante della discesa. Oltre ciò la verga del semplice AG passa per il centro di gravità K del composto, siccome richiede il secondo Lemma; dunque o il pendolo AG è il semplice isocrono, di cui si va in traccia, ovvero è impossibile un pendolo semplice di determinata lunghezza costantemente isocrono al pendolo composto BAC.

In fatti se il pendolo semplice costantemente isocrono non è AG, sia di lunghezza minore o maggiore

o maggiore: e giacchè per una parte dee la sua verga passare per il centro di gravità K, e per l'altra se questo pendolo assunto ha da essere costantemente isocrono al composto BAC, debbe essere anche tale nel primo istante, dunque ne seguirà, che due pendoli semplici, uno più lungo, e l'altro più corto, situati nella stessa linea retta AKG, e conseguentemente senza le dipendenti dalla gravità costante. le loro forze tangenziali saranno nel primo momento del loro moto egualmente iso=crone al composto BAC, e senza per conseguenza fra loro, il che è contrario al corollario 2. del primo Lemma.

Corollario 1.

Dalla nostra costruzione ne nasce una for=mola, per cui senza alcun raggiro di cal=colo si determina la lunghezza AG del pendolo semplice isocrono al composto BAC; conciossiachè condotta la linea retta CKB, abbiamo per una proprietà elementare del circolo il rettangolo CKB uguale all'altro AKG, o sia

$$CKB = AK \cdot \overline{AG - AK}, \text{ e perciò}$$

$$\frac{CKB + AK^2}{AK} = AG.$$

Corollario 2.

Connessi i due pesi B, C colla verga rigida e priva di inerzia e di gravità BKC, indi raccomandato il punto K ad un'altra verga AK di simil natura; egli è evidente, che tolte di mezzo le verghe AB, AC, niuna mutazione si vedrà il pendolo composto BAC, purchè stia ferma rispettivamente ad AK la posizione della verga BKC.

Scolio

Scolio

Taluno potrebbe ridire, essere in ciò mancante questa unica soluzione, perchè io suppongo possibile un pendolo semplice perfettamente isocrono ad un dato composto, e non lo dimostro. Per levare ogni dubbio su questa possibilità, ricorro al metodo sicurissimo delle variazioni. Il pendolo composto BAC (fig. 9.) cominciando dalla quiete faccia moto intorno il centro di sospensione A, e passi alla posizione bAc. Si tirino le verticali BD, KH, CD, e le orizzontali bD, kH, cD, e si chiamino U, u le velocità dei corpi B, C nei siti b, c. Le note formole ci somministrano le equazioni

$$B\cdot BD + C\cdot CD = \frac{B\cdot U^2 + C\cdot u^2}{2}\ ;$$

ma per la proprietà del centro delle masse K

$$B\cdot BD + C\cdot CD = \overline{B+C}\cdot KH,$$

ed inoltre nominata V la velocità del centro K giunto in k

$$AK : AB :: V : U = \frac{AB\cdot V}{AK}$$

$$AK : AC :: V : u = \frac{AC\cdot V}{AK}\ ;$$

Dunque adempiute le sostituzioni

$$\overline{B+C}\cdot KH = \frac{B\cdot \overline{AB}^2 + C\cdot \overline{AC}^2}{\overline{AK}^2}\cdot\frac{V^2}{2} \quad (1)$$

Si tiri AL normale a CB, e giacchè

$$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KB}^2 + 2LKB$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{KC}^2 - 2LKC,$$

supporremo essere

$$B\cdot\overline{AB}^2 + C\cdot\overline{AC}^2 = B\cdot\overline{AK}^2 + B\cdot\overline{KB}^2 + B\cdot 2LKB + C\cdot\overline{AK}^2 + C\cdot\overline{KC}^2 - C\cdot 2LKC.$$

Essendo K il centro di gravità delle masse B, C abbiamo

abbiamo $B.KB = C.KC$, e perciò nell' omogeneo di comparazione la quantità $B.2LKB - C.2LKC = 0$, e $B.\overline{KB}^2 + C.\overline{KC}^2 = \overline{B+C}.CKB$. Quindi l'equazione prenderà il seguente aspetto $B.\overline{AB}^2 + C.\overline{AC}^2 = \overline{B+C}.\overline{\overline{AK}^2 + CKB}$; e la formola (1) ammetterà una doppia espressione $\overline{B+C}.KH = \dfrac{B.\overline{AB}^2 + C.\overline{AC}^2}{\overline{AK}^2}.\dfrac{V^2}{2}$

$$= \frac{\overline{B+C}.\overline{\overline{AK}^2 + CKB}}{\overline{AK}^2}.\frac{V^2}{2}.$$

Supponghasi un pendolo semplice AK, la cui ghianda $K = \dfrac{B.\overline{AB}^2 + C.\overline{AC}^2}{\overline{AK}^2} =$ $\dfrac{\overline{B+C}.\overline{\overline{AK}^2 + CKB}}{\overline{AK}^2}$ sia fornita della gravità $\dfrac{\overline{B+C}.\overline{AK}^2}{B.\overline{AB}^2 + C.\overline{AC}^2} = \dfrac{\overline{AK}^2}{\overline{AK}^2 + CKB}$

Moltiplicando una tale gravità per la massa della ghianda, ne risulta la forza $B+C$ agente per lo spazio KH. Se io caverò il valore della velocità V del punto K in qualunque sito k, mi incontrerò nella sovrapposta formola $\overline{B+C}.KH = \dfrac{B.\overline{AB}^2 + C.\overline{AC}^2}{\overline{AK}^2}.\dfrac{V^2}{2} =$

$$\frac{\overline{B+C}.\overline{\overline{AK}^2 + CKB}}{\overline{AK}^2}.\frac{V^2}{2}.$$

Il nostro pendolo semplice adunque camminerebbe di concerto col composto BAC e sarebbe ad esso isocrono. Quando si dimostri possibile un pendolo semplice AG dotato della gravità ordinaria contemporaneamente isocrono al precedente semplice AK ma diversamente gravido, una tale

possibilità

possibilità veruna alcuni preceda in riguardo al pendolo composto BAC. Il Corollario del Lemma 1. ci insegna, che due pendoli semplici sono isocroni, quando le forze tangenziali dipendenti dalla gravità, che forze tangenziali acceleratrici sogliono chiamarsi, stanno fra loro come le lunghezze di essi pendoli. Trovandosi, due pendoli AK, AG nella medesima linea retta, le dette forze tangenziali seguono la proporzione delle gravità; laonde se pongo come la gravità $\frac{\overline{B+C} \cdot AK^2}{B \cdot AB^2 + C \cdot AC^2} = \frac{AK^2}{AK^2+CKB}$ della ghianda K alla unità, per cui si esprime la gravità della ghianda G comune a tutti i nostri pesi, così la lunghezza AK alla AG, ci si presenterà la doppia analogia

$$\frac{\overline{B+C}\cdot AK^2}{B\cdot AB^2+C\cdot AC^2} : 1 :: AK : AG$$

$$\frac{AK^2}{AK^2+CKB} : 1 :: AK : AG$$

che somministrano altrettante espressioni della cercata lunghezza del pendolo semplice animato dalla naturale gravità, perpetuamente isocrono al composto BAC, cioè a dire $AG = \frac{B\cdot AB^2 + C\cdot AC^2}{\overline{B+C}\cdot AK} = \frac{AK^2+CKB}{AK}$.

Alla prima formola sono stati guidati i Geometri dai loro metodi, e la seconda è quella, in cui battendo una strada diversa mi sono incontrato.

Corollario 2.

La gravità $\frac{AK^2}{AK^2+CKB}$ ... è l'unico requisito che si rende necessario nel pendolo AK

per

per determinare col mio mezzo la lunghezza AG del pendolo semplice isocrono al composto BAC; e perciò io poteva supporre collocata in K qualunque massa, purchè fosse animata dalla predetta gravità. Ho preferita alle altre la massa

$$\frac{\overline{B+C}\cdot\overline{AK}^2+CKB}{AK^2}$$

, perchè il pendolo AK equivalga perfettamente al composto BAC. In tal guisa non solo il pendolo AK è sincrono al BAC, ma di più segue in entrambi una pari azione $\overline{B+C}\cdot KH = B\cdot BD + C\cdot CD$ ~~qua [illegible] fattosi un egual moto angolare~~, corrispondente ad un egual moto angolare, ed in tale circostanza sono eglino forniti di pari forza viva

$$\frac{\overline{B+C}\cdot\overline{AK}^2+CKB}{AK^2}\cdot\frac{V^2}{2}=\frac{B\cdot u^2+C\cdot u'^2}{2}$$

Inoltre siccome dalla egualità di due forze vive ho dimostrativamente dedotto il sincronismo dei due pendoli; così supposto l'isocronismo si può provare la parità delle forze vive. Ed in fatti se dopo avere scorsi nello stesso tempo archi simili non hanno acquistato eguali forze vive, sia per esempio più grande quella del pendolo AK. Per ridurla eguale alla altra del pendolo BAC, bisognerebbe immaginarci minorata la velocità della ghianda K, onde l'arco Kk si passasse in tempo più lungo. Ma come abbiamo dimostrato a forze vive pari devono corrispondere tempi pari; dunque il tempo in cui scorre l'arco Kk sarebbe eguale, e maggiore

del tempo

del tempo in cui si scorrono gli archi Bb, Cc, il che è un manifesto assurdo. Egli è adunque vero, che l'isocronismo dei nostri pendoli va sempre unito colla eguaglianza delle forze vive. Verrà in progresso occasione di far uso di una tal verità.

Corollario 2.

I soli elementi, che determinano la lunghezza $AG = \frac{\overline{AK}^2 + CKB}{AK}$ del pendolo semplice isocrono al composto BAC, sono la distanza AK del centro di gravità K dei pesi B, C dal punto di sospensione A, ed il rettangolo CKB. Quindi accresciute o diminuite le masse B, C, purchè conservino la loro primitiva ragione, ed il centro di gravità K stia nel suo sito, non si muterà nè la distanza AK, nè il rettangolo CKB, e conseguentemente neppure la lunghezza AG del pendolo semplice isocrono al composto BAC.

Corollario 3.

Fatta girare la verga CB intorno il centro K, non alterandosi, nè la linea AK, nè il rettangolo CKB, non dee nè meno diversificarsi la lunghezza AG del pendolo semplice isocrono.

Corollario 4.

Passi per il punto K (fig 5.) un'altra verga bKc, e facciasi il rettangolo bKc eguale al dato BKC, e messe poi in b, c masse tali, che formino equilibrio in K; se in iscambio della verga BKC sostituiremo l'altra bKc, neppure per questo il pendolo semplice AG riceverà mutazione.

Corollario 5

Corollario 5°.

Finalmente considerata come costante la linea AG, si varj la distanza del punto K dal centro di sospensione A, colla sola condizione, che il detto punto non esca dalla linea AG; e posta in opera la verga CKB fornita dei requisiti, che siano [struck through] il rettangolo CKB s'eguagli alli AKG, e che K sia il centro di gravità dei pesi B, C; il nuovo pendolo composto BAC corrisponderà il dato semplice isocrono AG.

Problema 3.

Data la lunghezza AG di un pendolo semplice, determinare tutti gli infiniti composti di due pesi ad esso isocroni.

La soluzione del predetto Problema è una immediata conseguenza dei premessi Corollarj. Nella verga AG si segni ad arbitrio il punto K, per cui si faccia passare l'altra verga CKB collocata in qualunque positura rispettivamente ad AG; ma con questo riguardo, che ambo due le verghe si ritrovino nello stesso piano verticale, e fra gli infiniti rettangoli uguali alli AKG, se ne scelga uno a piacere CKB, indi ai punti C, B si adattino pesi tali, che formino equilibrio intorno il punto K: dico, essere il pendolo BAC, e tutti gli altri possibili colla stessa maniera rinvenuti, isocroni al dato semplice AG.

La dimostrazione si cava dalla nostra formola generale $AK + \frac{CKB}{AK} = AK + KG = AG$

Corollario.

Dalla costruzione dedotta, che solo quattro

capi

capi è infinito il numero de' pendoli composti
di due pesi isocroni ad un dato semplice, e
conseguentemente fra loro.

E primieramente egli è infinito questo numero,
perchè infiniti sono i punti K, che nella
verga AG segnare si possono.

In secondo luogo fissato il punto K, onde ne
consta il rettangolo AKG, infiniti rettangoli
per esempio CKB ponno determinarsi uguali
ad AKG, ai quali non mutandosi AK cor=
rispondono altrettanti pendoli composti di due
pesi fra loro diversi.

Si elegga in terzo luogo uno fra gli infiniti rettan=
goli CKB = AKG, e giacchè infinite sono le
masse B, C, che serbano la ragione dei lati
CK, KB del nostro rettangolo, anche per questo
titolo s'amplia all'infinito la moltitudine de'
pendoli composti isocroni al detto AG.

Resta per ultimo, che si facciano nascere altri infi=
niti pendoli composti, ai quali compete il
mentovato isocronismo, col girare intorno
il punto K la data verga BKC fornita delle
due masse determinate B, C.

Scolio 1.

Facendo passare per il punto K (fig. 8.) parecchie
verghe CKB, NKQ &c. di modo che
si adempiano due requisiti, cioè che i ret=
tangoli CKB, NKQ &c. siano uguali al
rettangolo AKG, e che si mettano ne' punti
estremi C, B, e negli altri due N, Q &c.
pesi tali, che siano fra loro equilibrati rela=
tivamente al punto K, avrassi un pendolo
composto formato di due coppie di pesi, o di
quante più ci piace isocrono al semplice AG.

Considerati i due pendoli CAB, NAQ come
separati, ognuno di essi ~~costituito~~ composto di due soli
pesi sarà isocrono al semplice AG, e
conseguentemente

conseguentemente si verificherà l'isocro-
nismo fra loro; dunque corpi insieme
non si faranno vicendevolmente contrasto
di sorte alcuna, e discenderanno o con-
giunti o disgiunti nella stessa maniera.
Laonde in ambo le ipotesi avranno il
semplice AG per isocrono.

Quindi una circonferenza di circolo ACNBQ
in tutti i suoi elementi egualmente grave
che oscilli intorno il punto di sospensione
A, avrà per pendolo semplice isocrono
AG eguale al suo diametro; imperciocchè
facendo passare per il centro K della curva
che è lo stesso col centro di gravità, infinite
linee, che da una parte e dall'altra termi-
nino nella predetta periferia, e supponendo
alle estremità delle braccia eguali attaccate
porzioni minime eguali della circonfe-
renza circolare, che facciano equilibrio
in K qualunque rettangolo BKC sarà
eguale all' AKG e l'aggregato di
infiniti pendoli di due pesi, o sia il
perimetro ACNBQ sarà isocrono
al pendolo semplice AG.

Ma se nella verga AG (fig. 7) segneremo
varj punti K, H &c. e raccomanderemo
ad essi le verghe trasversali CKB, QHN
con questa condizione che il rettangolo CKB sia
eguale all' AKG, ed il rettangolo QHN
al corrispondente AHG, e così di mano
in mano, indi faremo che i pesi applicati
alle estremità delle verghe abbiano il loro
centro particolare di gravità nei punti
K, H &c. della linea AG; ci si presenterà
un pendolo composto di finiti o infiniti
pesi isocrono al semplice AG. La ragione
si è, perchè serbando ciascun pendolo
di due gravi BAC, NAQ &c. l'i-

accennata

accennato isocronismo, non si turberà esso
dalla loro congiunzione.

E piegò una qualunque porzione di circonfe-
renza circolare CGB, ovvero cAG, ovvero
cCBG situata la metà a destra, e l'altra
metà a sinistra del diametro AG, ed oscillante
intorno il punto A richiederà il pendolo
semplice isocrono AG.

Molte altre curiosità di sì fatta natura si potreb-
bono dedurre da' nostri principj; ma lascia-
mo di buona voglia, che i Geometri ado-
prino intorno ad esse la loro industria.

Scolio 2.

Mi trovo ridotto a notare una proprietà dei
pendoli composti, ed è, che in qualunque loro
posizione, e nel principio, e nel proseguimento
del moto, il centro di sospensione viene
premuto, come se ad esso si addossasse un
peso determinato. Questa pressione non
ostante non dipende punto dallo strumento
ora minore ed ora maggiore, che soffre
la verga AK. ~~la quale passa per il centro~~
(Bg A), la quale passa per il centro di
gravità K del pendolo composto. Il mede-
simo strumento ha due origini, l'una
dalla risoluzione della forza della gravità del
pendolo, che si suppone riunita in K,
in tangenziale e normale; e l'altra dalla
forza centrifuga, che acquistano le dette gravi-
tà girando intorno il punto A. Se il
pendolo è in quiete, e la direzione della
verga AK orizzontale, la pressione della
verga AK si eguaglia a metà. La pres-
sione di cui parliamo procede dall'essere i
pendoli piuttosto composti che semplici,
ed in fatti i pendoli semplici ne vanno esenti
ed aggiungono il valore nei pendoli composti di

due

due pesi.

Problema 4.

Dato un pendolo composto di due pesi, trovare la posizione sostituita del centro di sospensione.

Costruzione

Nel pendolo composto di due pesi BAC (Fig. 4) alla verga CKB si sostituisca la AKG e si ponga nelle sue estremità A, G una somma di pesi eguali a B+C che facciano equilibrio intorno il punto K. Allungando i soliti nostri componenti, che in G va collocata la grandezza $\frac{\overline{B+C}\cdot \overline{AK}^2}{\overline{AK}^2+CKB}$, ed in A la grandezza $\frac{\overline{B+C}\cdot CKA}{\overline{AK}^2+CKB}$. Egli è manifesto che il centro di sospensione A del pendolo AG viene premuto dal peso $\frac{\overline{B+C}\cdot CKB}{\overline{AK}^2+CKB}$. Ora io dico, che il punto di sospensione del pendolo composto BAC, e di tutti gli altri isocroni di due pesi, che hanno comune il centro di gravità K, e l'aggregato delle masse B+C, sostiene una pari pressione.

Dimostrazione

La pressione della quale si tratta è una forza derivata, che trae l'origine dall' impedimento di una parte dell' azione della gravità, che si deduce dalla, se il pendolo ... che il composto BAC, pure il semplice isocrono AG, la cui grandezza G = B+C. Nel tempo che qualunque in questo pendolo segue l'azione B+C · GM, i pesi

i pesi del pendolo BAC, e di tutti gli isocroni di due grandezze formate dalla proposta poco fa notate rappresentano le azioni $\overline{B+C}\cdot KH$. Fra i detti pendoli si conti la AG, intendendo si consideri come formato dalla verga AG pendente dal punto K della verga AK, e riducendo in A, e G si suppongano intanto le masse $\frac{\overline{B+C}\cdot CKB}{\overline{AK}^2+CKB}$, $\frac{\overline{B+C}\cdot \overline{AK}^2}{\overline{AK}^2+CKB}$. Ma l'azione di un tal pendolo si esprimerebbe per $\frac{\overline{B+C}\cdot \overline{AK}^2\cdot GM}{\overline{AK}^2+CKB}$; dunque a ciò che le azioni si uguagliano quelle dei pendoli sopra mentovati ed in particolare del BAC. Sottratta una azione dall'altra $\overline{B+C}\cdot GM$, che nascerebbe se la somma dei pesi B+C fosse riunita nel punto G, ne risulta l'azione impedita $\frac{\overline{B+C}\cdot CKB\cdot GM}{\overline{AK}^2+CKB}$

Dividendola per lo spazio GM, ne risulterà la forza $\frac{\overline{B+C}\cdot CKB}{\overline{AK}^2+CKB}$, la quale sostenta il fulcro A, in quanto che le viene vietato di applicarsi allo spazio GM.

Questione

R[illegible] A, e N B [illegible] [illegible] N [illegible] [illegible] colla verga AN.

Corollario 1.

A intendere che il rettangolo CKB sarà più grande

relativamente

relativamente al quadrato AK^2, la pressione sofferta dal punto A si eguaglierà ad una porzione maggiore dei pesi B + C. Quindi se AK = 0, onde si uniscano in un punto solo i due centri di sospensione e di gravità, la detta pressione pareggia la stessa somma dei pesi B + C. In tale circostanza resta impedita tutta l'azione delle due gravi B, C, ed il pendolo composto BAC non fa moto.

Corollario 2.

Tutto al rovescio se il rettangolo CKB va diminuendo a grado a grado più piccolo rispettivamente al quadrato AK^2, cala sempre più il valore della pressione sostenuta dal punto A, la quale finalmente svanisce, quando coincidono ~~arrivate~~ le due sfere B, C nel punto K, il rettangolo CKB si eguaglia a nulla, ed il pendolo composto si converte in semplice.

Scolio 3.

Rimane che si renda generale il nostro metodo, e si adatti a' pendoli di tre, indi di quattro pesi, e così all'infinito. Abbiasi il pendolo composto di tre, idest A, ENB (fig. 4), il quale può considerarsi ~~comaguensi~~ ~~puro~~ formato nella seguente maniera. Delle tre sferule E, N, B, che lo costituiscono, se ne scelgano due E, N ed osti-iscano, e si concepiscano collocate nella estremità della verga EN. Sia H il loro centro di gravità, il quale, connesso colla verga sfera gherenda B per mezzo della seconda verga HB; egli è certo, che in essa si ritrovava ~~si stanziava~~ il punto K centro comune ~~di~~ di gravità dei tre pesi E, N, B. Fermata nel suddetto punto K la terza

verga

verga AK mobile intorno il centro di sospensione A, avremo il pendolo composto A, QNB costituito da una doppia bilancia QHN, HKB, e dalla leva AK. Immaginiamoci posta in H la massa $\frac{(Q+N) \cdot \overline{AH}^2 + QHN}{\overline{AH}^2}$, la cui gravità $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AH}^2 + QHN}$, è conseguentemente il peso, che si determina moltiplicando la massa nella gravità, eguale a Q+N. Nello Scolio dopo il Problema, e nel Corollario 2. di detto Scolio ho fatto vedere, che il pendolo semplice AH formato dalla ghianda H or ora descritta è isocrono, e perfettamente equivalente al pendolo composto di due pesi A, QN; seguendo in entrambi, quando hanno un pari movimento angolare, vibrazioni eguali, e vi corrispondono eguali forze vive. Ho parimente avvertito, che nei detti pendoli l'isocronismo è talmente legato colla eguaglianza delle forze vive, che un requisito non può stare senza dell'altro. Richiamate alla memoria di chi legga queste verità, mi faccio a dimostrare il seguente

Lemma 3.

Il pendolo composto di tre ghiande A, QNB animate dalla ordinaria gravità è isocrono al pendolo composto di due ghiande A, HB, la prima delle quali contenga la massa $\frac{(Q+N) \cdot \overline{AH}^2 + QHN}{\overline{AH}^2}$ e sia animata dalla gravità $\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AH}^2 + QHN}$.

Facciamo i due pendoli in pari moto angolare, e succedersi, che da un canto i due pesi Q, N, e dall'altro il peso H descrivono

adoriano azioni eguali. A quelle si aggiunga la comune azione del peso B, e si troveranno eguali le azioni dei pendoli A, CNB, A, HB, e per conseguenza pari le loro forze vive. Diugasi, che i nostri pendoli non essendo isocroni, e sia più adesso A, HB più tardo di A, CNB. Movendosi A, HB più lento di A, CNB, moverà A, H più tardo di A, CN. Ma perché i pendoli ultimamente nominati se fossero isocroni, le loro forze vive sarebbero eguali, dunque la forza viva del più lento A, H è minore di quella del più celere A, CN. Oltre a ciò il corpo B nel pendolo più tardo A, HB acquista minor forza viva, che nel più veloce; dunque la forza viva del primo pendolo A, CNB è per doppio motivo più piccola di quella del secondo, il che è contrario a quanto abbiamo dimostrato. Se si affermasse, essere il pendolo A, HB più celere dello A, CNB, si troverebbe la forza viva più grande in quello, che in questo. Quindi ripugnando egualmente, che il pendolo A, HB sia o più tardo o più presto del pendolo A, CNB, resta che i predetti pendoli si vibrino isocroni; il che &c.

Problema 5.

Dato un pendolo composto di più pesi determinare il semplice ad esso costantemente isocrono.

Costruzione.

Si trovi per il Problema 2. la lunghezza AHZ del pendolo semplice isocrono a quello di due pesi A, CN considerato da se solo, indi con i pesi costanti A, Z, B, lasciasi passare [illegible] AZB.

AZB, e prorogata la linea AK fino a tanto che vada a tagliare la circonferenza del circolo descritto nel punto S; dico, che AS è il pendolo semplice corrispondente isocrono al composto di tre pesi A, QNB. Si prolunghi fino in C la linea BH, e sostituiscasi in cambio della QN un'altra verga qn, nella quale sia Hq = HC, ed Hn = HB, e nei punti estremi di essa si collochino le masse q, n equilibranti intorno il punto H, la di cui somma q+n si trovi eguale all'aggregato Q+N delle altre due poste in Q ed N. Impariamo dal calcolo i valori di $q = \frac{\overline{Q+N} \cdot HB}{CB}$, di $n = \frac{\overline{Q+N} \cdot HC}{CB}$. Con tal mezzo si ottiene; che il punto K non muta sito, e sia centro comune di gravità dei tre corpi q, n, B, siccome lo era degli altri tre Q, N, B. Avverto, che il pendolo di due pesi A, qn, è isocrono, e conseguentemente equivalente al pendolo altresì di due pesi A, QN, essendo ad entrambi comune il centro di gravità H, e la somma delle masse q+n = Q+N, ed eguagliandosi ~~[illegible]~~ i rettangoli qHn = CHB, QHN, per il motivo che l'uno e l'altro pareggia il rettangolo AHZ. La verga qn si giri in maniera che sovrapponga alla CHB ed il peso q cada nel punto C, e l'altro n vada ad unirsi col terzo peso B.

Dimostrazione

Per la stessa ragione, per cui il pendolo A,HB, del quale abbiamo parlato nel precedente Lemma è isocrono all'A, QNB, serba altresì isocronismo coll'altro A, qnB, e conseguentemente sono ~~altro~~ fra loro isocroni i pendoli A, QNB, A, qnB.

pesi A, e N B. Ma questi ultimi si può considerare di due pesi, supponendosi uniti nello stesso punto B le due gravità n, B, ed il detto pendolo di due pesi per il Problema 2. è isocrono il semplice A G; dunque il pendolo semplice A G è isocrono al composto di tre pesi A, e N B; il che &c.

Corollario 1.

Giacchè lo stesso pendolo semplice A G corrisponde in qualità di isocrono e al pendolo di tre pesi A, e N B, e allo aggregato di tre pesi A, e n B, il quale si trasmuta in uno di due pesi, quando la verga en coincide colla linea CB, ne segue, che la medesima formola può adattarsi tanto ai pendoli di due pesi, quanto a quelli di tre, onde abbiasi anche nel nostro caso $AG = \frac{\overline{AK}^2 + CKB}{AK}$ lunghezza del pendolo semplice isocrono al dato di tre pesi A, e N B.

~~Corollario secondo~~

~~Per la soluzione di questo Problema [illegible] pendolo [illegible] si può considerare di due pesi [illegible] isocrono [illegible] $AG = \frac{\overline{AK}^2 + CKB}{AK}$ [illegible]~~

~~[illegible] $\frac{\overline{AK}^2 + CKB}{AK}$ [illegible]~~

~~[illegible] peso [illegible]~~

Corollario 2.

Troveremo nella più breve maniera la lunghezza

725

lunghezza AG del pendolo semplice isocrono al composto A, CNB, determinando prima il rettangolo CHB eguale al dato CHN, ed indi il rettangolo AKG eguale al CKB.

Corollario 3.

Dopo lo Scolio sopra il Problema 2. al pendolo AenB, che si può considerare di due pesi, è isocrono ed equivalente il pendolo AK, onde in K si collochi la massa

$$\frac{\overline{e+n+B}\cdot\overline{AK}^2+CKB}{\overline{AK}^2}=\frac{\overline{C+N+B}\cdot\overline{AK}^2+CKB}{\overline{AK}^2},$$

giacchè $e+n=C+N$, ritenuta della gravità $\frac{\overline{AK}^2}{\overline{AK}^2+CKB}$, e di peso conseguenza del [illegible]. Ma il pendolo AenB peso $C+N+B$ è isocrono ed equivalente al pendolo ACNB; dunque lo stesso si verifica del pendolo AK. Col mezzo di questo pendolo si potrebbe agevolmente scoprire la lunghezza del pendolo semplice AS isocrono al composto di tre pesi A, CNB servendosi del metodo posto in opera nel fine del citato Scolio.

Corollario 4.

Ricavasi dal Problema 4., che considerando il pendolo AenB di due pesi, quando la verga en cade sopra la linea CB, il centro di sospensione A sostiene la pressione

$$\frac{\overline{e+n+B}\cdot CKB}{\overline{AK}^2+CKB}=\frac{\overline{C+N+B}\cdot CKB}{\overline{AK}^2+CKB}.$$

Ora essendo il predetto pendolo isocrono e compiutamente equivalente al dato A,CNB, seguono in [illegible] eguali azioni, ed

una

una pari azione detta impedita, la quale tirica per lo spazio GM (fig. 4) per un discendo il comune pendolo semplice isocrono AG; e cominciava il sovrap= posto valore della pressione sofferta dal punto di sospensione A dell'uno e dell'altro pendolo.

Scolio 2.

Qualunque altra verga; che dotata dei requisiti esposti nella costruzione del Pro= blema si sostituisse in fosse alla CN (fig 9) si avrebbe giunto ad una elegante solu= zione di esso Problema; con questo però che in detta verga si verifica che a proprietà di potersi adattare al circolo ACGB.

Si appenda al punto H in vece della verga CN la equivalente en, che ha corda del predetto circolo, e non interseche la verga AG. Condotte le linee nB, eB, si attacchi al punto estremo B della verga nB una porzione della verga nB, che faccia colla ghianda n equi= librio nel punto L; il residuo della massa B si intenda raccomandato all'altra verga eB. Giacchè nella linea AG sta situato il punto L centro di gravità della ghianda n, e di una por= zione di B, come altresì il punto K centro totale di gravità delle due masse e, n, B; ne nasce di conseguenza, che si equilibreranno nel punto D la ghianda e ed il residuo di B. Quindi essendo eguali a coppia i rettangoli ALG, nLB, ADG, eDB, lo stesso pendolo AG sarà isocrono ai due pendoli composti ognuno di due

di due pesi A n B, A e B, i quali però anche fra loro determinano l'isocronismo. Dunque o si vibrino separati, o si congiungano in un pendolo di tre pesi A, e n B equivalente al dato A, e n B; non si turberanno punto nei loro moti, e tutti quattro i suddetti pendoli, cioè due formati di due pesi, ed altri due di tre riconosceranno per loro comune isocrono il semplice A G: il che ec.

Potendo poi succedere, che la verga en tagli la retta A G, come nella Fig. 10., allora si vede in ciò solamente variare la costruzione, che messe in opera le verghe e B, en, i due pesi B, si facciano equilibrio in I, e P colla massa e in due porzioni di esse; restando nel rimanente fermo il progresso della dimostrazione.

Nella verga sostituita en abbiasi e H = H 7, n H = A H, e si rotti giravolta [illegible] mandata, che il punto n cada in A, e l'altro e venga a coincidere col punto 7. In ordine a ciò il pendolo di tre pesi A, e n B, cioè alli assunto A, e N B si trasformerà in uno di due A, e B; imperocchè il peso n ridotto nel punto di sospensione A, la di cui azione resta totalmente impedita, nulla influisce nel moto del pendolo composto. Ora ad un tal pendolo per il Dottissimo n... corrisponde il pendolo semplice isocrono A G, il quale per conseguenza sarà tale ancora relativamente al pendolo proposto A, e N B.

Si può anche fare, che il punto n venga ad unirsi col punto G, ed in tal fatto incontro il pendolo di tre pesi A, e n B si avrebbe a considerare come formato da due pendoli

uno

uno semplice AG, ovvero AG; e l'altro
composto di due pesi A, e B medesimi
fra loro isocroni, e congiunti: i quali sia
un pendolo di tre pesi A, e N B, o
sia A, e G B, risolvendosi il medesimo
isocronismo in riguardo al pendolo
semplice AG.

Scolio 2.

In quella guisa che nella soluzione delli antecedenti Problemi si abbiamo ritrovato
il pendolo semplice AD (fig 11) isocrono
al composto di due pesi A, e N, e fa=
cendo poscia passare un circolo per i tre
punti A, D, B, ci ha guidato ancora
a determinare il pendolo semplice AKG
isocrono al composto di tre ghiande A, e N B.
Non altrimenti se si ripeterà le operazioni
rispettivamente ad altri due di loro pesi
per esempio N, B ritrovando il pendolo
composto A, NB, di due ghiande l'iso=
crono semplice AM, e descrivendo un
secondo intorno ai tre punti A, C, M un secondo
cerchio, e questi due circoli si interse=
cheranno nel punto dato G, e tirata ad
essi comune la corda AG: Si
tirino dal peso C per il punto L, dove
è la retta di gravità delli due pesi N, B, la retta
CLD, che termini al punto D della
circonferenza ACGM: passerà essa,
come è noto, per K centro comune di
gravità di tutte e tre le ghiande.

Già si è detto, che i rettangoli CHA, AHN
sono eguali, e per la medesima ragione
si eguaglieranno gli altri due CLD,
NLB: Ciò premesso per i punti
C; N; B si delinei il terzo cerchio CNB.
il quale

è facile a provarsi, che i punti C, D sono nella sua circonferenza; imperciocchè ~~conciossiachè~~ posto che ciò non sia, i rettangoli CHB, QHN giammai si eguaglierebbono, come altresì gli altri due QLD, NLB; il che di sopra ho dimostrato verificarsi. Ne segue, che appartenendo le due corde QD, CB al predetto circolo QCNDB, ed intersecandosi nel punto K, passa eguaglianza fra i due rettangoli QKD, CKB. Ma per la stessa ragione, essendo QD, AG due corde del medesimo circolo AQGD, e CB, AG due altre corde anche proprie del circolo ACGB, ci si presentano eguali a coppia a coppia i rettangoli QKD, AKG; CKB, AKG; dunque AKG = AKG, o sia AG = AG, il che non può mai succedere, se non quando il punto estremo G della verga AG si trova nell'intersecamento delle due circonferenze locali AQGD, ACGB: ciò che doveva dimostrarsi.

Corollario 1

I tre passi Q, N, B ponno accoppiarsi a due a due in tre soli diversi maniere, cioè a dire Q, N; N, B; Q, B. Delle due prime s'è fatto uso, e per quello appartiene alla terza, se al pendolo composto di due ghiande A, QB determineremo il semplice isocrono, e per il punto estremo della sua verga, e per gli altri due A, N descriveremo un nuovo circolo, anche questo passerà per il punto G. Di più se per i due punti N, K condurremo una linea retta, che termini al punto P della circonferenza QNB, questo punto, che è analogo ai due C, D, si troverà nella periferia del circolo

circolo rispettivamente descritto.

Corollario 2.

In tre diverse maniere più secondo la norma del nostro metodo può concepirsi formato il pendolo di tre pesi A, QNB, togliendo di mezzo le tre verghe ordinarie, che congiungono i tre corpi col centro di sospensione A, e sostituendovene delle altre equivalenti:

Tenuta in tutti i casi ferma la verga AK, che unisce il punto A col centro di gravità K; primieramente si attacchi al predetto centro K la seconda verga HKB, indi al punto H la terza QHN, e così avremo il nostro pendolo tal quale lo abbiamo considerato nello Scolio 3, che precede il Problema 5.

Secondariamente raccomando al punto K una verga QKL, indi al punto L un'altra verga NLB; onde abbiasi il doppio vette QKL, NLB.

Si otterrà la terza maniera, congiungendo con una verga i pesi Q, B, e connettendo il loro centro di gravità I col punto K, e col terzo peso N per mezzo della verga OKN.

Or qui si noti, che allo stesso pendolo di tre pesi A, QNB giusta i tre diversi modi sopra ideati, corrispondono tre pendoli isocroni ognuno di due pesi C, B; D, Q; P, N, nei quali può trasformarsi, e che stante l'eguaglianza dei rettangoli CKB, QKD, NKP, AKG tutti e tre richiedono per isocrono lo stesso semplice AG. A norma di ciò siccome abbiamo espresso il valore di AG per $\frac{CKB + \overline{AK}^2}{AK}$, così potrà egualmente esprimersi per

QKD

$\frac{CKD + \overline{AK}^2}{AK}$, o vero per $\frac{NKD + \overline{AK}^2}{AK}$.

Scolio 3

I tre modi per cui si concepisce formato il nostro pendolo di tre pesi, de' quali nello Scolio precedente abbiam favellato, ci danno campo di far nascere un infinita varietà di pendoli composti, che tutti fra loro, ed al semplice AG sono isocroni, nè quali restano salde le tre masse, e di più la distanza del centro di gravità K da quello di sospensione A.

Abbiasi il pendolo di tre pesi C, N, B sostenuti dalle tre verghe AK, BH, CN, date di lunghezza e di posizione, come nella Figura 12 e pesi, dato che sia altresì la misura del pendolo semplice isocrono AG, posso far girare tanto la verga BH intorno il punto K, quanto l'altra CN intorno il punto H, o vero nello stesso tempo ambedue; e per questo solo capo traggono l'origine innumerabili pendoli, in cui, quantunque le verghe alla nostra maniera non cangino altro che la posizione; si diversificano però le tre verghe AC, AN, AB componenti il pendolo giusta la forma ordinaria.

A questo passo s'avverta, che girate le verghe BH, CN, come nella Figura 13, mi è permesso di connettere per cagion di esempio i due pesi N, B colla verga NB, sostituendo questa insieme colla corrispondente CL in cambio delle altre due BH, CN. Di bel nuovo si girino intorno i punti K, ed L le due verghe surrogate CL, NB, ed acquistino la positura come nella Figura 14; ristabilite due verghe, tornino a rimettersi quella che congiunge

che congiunge i due pesi a, N, e l'analoga BH; le quali paragonate colle due indicate dalle medesime lettere nella figura 1a. fanno lo stesso ufficio, ma si distinguono di lunghezza differente.

Con tale artificio si moltiplica all'infinito il numero de' pendoli tutti fra loro isocroni, in cui salve le condizioni delle masse a, N, B, e della distanza AK invariabili, le due rette aN, BH ponno avere innumerabili valori diversi modificati in maniera, che le due braccia aH, HN stiano sempre in ragione inversa delle masse a, N; come altresì le due braccia BK, KH in ragion reciproca di B : a + N.

Scolio 4.

La costruzione per me adoperata nel Problema di trovare il pendolo semplice isocrono ad uno di tre ghiande con poca alterazione può applicarsi a tutti gli altri composti di quanti si voglia pesi.

Siccome in un pendolo di tre pesi ne abbiamo scelto due, trovando il composto di cui il semplice isocrono, indi per le estremità di questo, per il terzo peso, e per il centro di sospensione si è fatto passare un circolo; così rendendoci proposto un pendolo di quattro pesi, ne eleggeremo tre ed al composto de' quali rinvenuto il suo isocrono per il Problema si proseguirà la costruzione descrivendo un circolo per il punto estremo del predetto pendolo isocrono, per il quarto peso, e per il centro di sospensione. Condotta poscia per i due centri di sospensione, e di gravità di tutti e quattro i pesi una retta, che vada a terminare nella periferia deli=

neata

ridotta, ci darà quella la lunghezza eguale del pendolo semplice isocrono al composto di quattro ghiande..

Similmente in riguardo ad un pendolo di cinque più determinato prima li isocroni a quattro di essi, replicherò la medesima operazione, e così di mano in mano alli superiori.

Per quello si aspetta alle dimostrazioni, trattando dei pendoli di tre ghiande ho premesso il Lemma che supponendo collocata nel punto H (Fig. 6) centro di gravità delle due ghiande C, N scelte ad arbitrio, ovvero la terza B, la massa $\dfrac{\overline{C+N}\cdot\overline{AH^2+CHN}}{AH^2}$ dotata della gravità $\dfrac{AH^2}{AH^2+CHN}$, e di peso $C+N$, il pendolo A, HB è isocrono al propotto di tre pesi A, CNB. Non altrimenti se il numero dei pesi supera il ternario, seguiterò lo stesso metodo, trovando, che chiamata S la somma delle masse, e posta in H centro di gravità di tutti i pesi a riserva di un solo, che sia per esempio B; la massa $\dfrac{\overline{S-B}\cdot\overline{AH^2+CHN}}{AH^2}$, la cui gravità $\dfrac{AH^2}{AH^2+CHN}$, ed il peso $S-B$; il pendolo A, HB ed il dato si vibrano isocroni.

Siccome poi un pendolo di tre ghiande si è ridotto ad uno di due, nella stessa guisa, uno di quattro trasformeràssi nell'equivalente di tre, uno di cinque nell'equivalente di quattro, & così il problema si va un passo addietro, e si riduce a quello, che immediatamente precede, il quale si suppone già sciolto.

La nominata trasformazione suggerisce il corollario, che qualora si spiega situata nel punto K centro di gravità

di gravità di tutti i più componenti il pendolo la massa $S \cdot \overline{AK}^2 + CKB$ raccolta nella gravità $\frac{\overline{AK}^2}{\overline{AK}^2 + CKB} \cdot \overline{AK}^2$, e però consegue dal peso S, il pendolo semplice AK è sincrono al dato composto.

Si ricaverebbe pure, che il centro di sospensione A di un pendolo qualunque composto soffrirà la pressione $\frac{S \cdot CKB}{\overline{AK}^2 + CKB}$.

Scolio 5.

Esposto in succinto il metodo generale, non resta però, che non vi siano in altri incontri delle maniere più semplici, ed eleganti di costruire il nostro Problema, e di dimostrarlo. Abbiamo divisi i pendoli composti di più di tre pesi in due parti, una delle quali non contenea se non se un peso solo, lasciando tutti gli altri rimanenti nell'altra parte: molte altre distribuzioni frattanto istituir si potevano, tra le quali la più congrua si è di partire i pesi per metà se sono pari, o pure se sono impari, sì che i due numeri di essi pesi differiscano per l'unità.

Ne daremo un saggio col seguente esempio. Sia il pendolo di quattro pesi O, N, P, Q (Fig. 15) oscillanti intorno il punto A. Si congiungano a due a due colle verghe ON, PQ, nelle quali si segnino i due centri di gravità H, X, che si uniscano colla verga HX, in cui ritrovandosi il centro di gravità K delle quattro grandi, si raccomandi questo al punto di sospensione A per mezzo della verga AK. Rinvenuti

poscia

posciachè i due pendoli semplici, AF isocroni a quello di due pesi A, QN, ed AZ parimente isocrono all'altro di due pesi A, PQ; per i tre punti A, F, Z facciasi passare un circolo e si prolunghi tanto la verga HX, quanto la AK sin che la prima tagli la circonferenza ne' due punti B, C, e la seconda nel punto G: dico essere AG la lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto di quattro pesi.

Pongasi in C una massa tale, che faccia equilibrio colle due P, Q nel punto K, ed in B un'altra massa, che si equilibri colle altre due Q, N intorno il medesimo centro K, onde le ghiande B, C vengano ad avere per conseguenza in K il loro centro di gravità.

Egli è chiaro per le cose di sopra dette, che avremo due pendoli di tre pesi, cioè A, CPQ; A, BQN ognuno de' quali riconosca per suo tautocrono il semplice AG; dunque congiunti insieme e formato di tutti un pendolo di sei pesi, col medesimo semplice starà fermo lo isocronismo. Ma questo isocronismo si verifica anche fra il semplice AG, ed il composto di due pesi A, BC; dunque tolte di mezzo le ghiande aggiunte B, C, resterà il pendolo semplice AG isocrono all'assunto di quattro pesi A, QNPQ, il che &c.

Scolio 6.

Propongo un'altra general costruzione differente più dalla forma, ma che serve a dilucidar la materia, e a darle la semplicità, di cui è capace.

Abbiasi un pendolo di quanti si voglia pesi B, N, Q, R, Y &c. (fig. 102) e sia K il loro centro di gravità; indi omessa ed astratta la ghianda B, si segni H centro di gravità delle rimanenti, poscia esclusa a piacere una

seconda

seconda ghianda N; si determini il centro di gravità delle altre che restano; e così vadasi continuando sinora tanto che si compiano le operazioni col rinvenire il centro di gravità T delle due ultime masse Y, ed R.

Dopo ciò alla prima verga AK, che connette il punto di sospensione A col centro totale di gravità K, raccomando la seconda verga BKH, ed al punto H la terza NHX, ed al punto X la quarta QXT, ed al punto T la quinta RTY.

Si prolunghi primieramente la quarta verga QT in P, di modo che il rettangolo QTP sia eguale al YTR: secondariamente la terza NX in Q, onde il rettangolo NXQ si eguagli al PXQ: in terzo luogo continuata la seconda verga BH in C, facciansi eguali i rettangoli QHN, BHC: per ultimo la prima verga AK si prolunghi in maniera sino in G, che diasi l'uguaglianza fra i rettangoli CKB, AKG; e col progresso di tali operazioni si scoprirà la lunghezza AG del pendolo semplice isocrono al composto di quanti si voglia pesi.

Ora si ha per così dir sotto gli occhi, qualmente i pendoli più composti vadano passo passo riducendosi ai più semplici: come per ragion di esempio uno di cinque pesi Y, R, Q, N, B si tramuti in uno di quattro P, Q, N, B; quel di quattro in uno di tre Q, N, B; quel di tre in uno di due C, B; e finalmente questi ultimo passi nel semplice AG. Si avverta però, che nelle riduzioni delle varie costituenti i pendoli a grado a grado più semplici vanno fatte masse tali, che mantengano i debiti equilibrj totali, e parziali.

Scolio 7.

Lo scioglimento del Problema diritto agevolmente quello dell'inverso ci somministra: cioè a dire: Dato il pendolo semplice AG, trovare tutti gli infiniti composti di un

determinato

Y437

determinato qualunque numero di ghiande, i quali stieno ad esso ricavare.

Nella verga AG si segni il punto K a piacimento, a cui si attacchi la seconda verga BC dotata di questo unico requisito, che il rettangolo BKC sia uguale all' AKG. Con ciò per le cose dimostrate nel Problema 3. si ha il metodo di scoprire tutti i pendoli composti di due pesi isocroni al dato semplice AG; poichè si mettano in B, e C masse tali, che formino equilibrio in K.

Un altro punto H si fissi ad arbitrio nella verga BC, per il quale passi la terza verga QN colle seguenti condizioni, che il rettangolo QHN si eguagli al BHC, e che tolta di mezzo la massa C, le ghiande Q, N si equilibrino doppiamente, cioè fra loro in H, e colla massa B in K;

Si prosegua così, coll' aggiungere le verghe PQ, YR &c., salva sempre l'eguaglianza fra i corrispondenti rettangoli, e colori i necessarj equilibrj.

La facoltà, che abbiamo, di eleggere a piacere i punti K, H &c., e le braccia che formano i rettangoli CKB, QHN &c.; la diversa posizione delle verghe, e le masse, che per la detta ragione ponno all' infinito crescere, o calare, sono gli elementi, che ci danno una più che infinita varietà di pendoli in ciascun genere, vale a dire e di tre, e di quattro, e di cinque pesi &c., la qual varietà viene accresciuta dalla nostra costruzione; non potendosi assegnar un pendolo, che a norma di essa esprimere non si possa.

Fermiamoci alquanto sopra i pendoli di tre pesi rappresentati generalmente dal A, QNB. Questo ha per base quel di due ghiande A, AC, e per conseguenza

e per conseguenza al più composto si adattano tutte le infinite diversità, di cui è capace il più semplice. Ma posto che il pendolo di tre masse A, B, C riesca inalterabile per ogni capo, non ostante ciò quello di tre pesi si diversificherà all'infinito, e per la differente scelta del punto H, e per gli infiniti valori delle due braccia CH, HN, e per le innumerabili posizioni della verga CN.

Si avrà dunque nei pendoli di tre gravi una immensa varietà per otto titoli diversi, de' quali sono stati da noi or ora notati, e gli altri quattro appartengono ai pendoli di due pesi, e si leggono registrati nel Corollario del Problema 3.

Stabilito in tutte le sue parti invariabile il pendolo di tre pesi C, N, B, se faremo passaggio ad uno di quattro A, C, N, B, scopriremo, che esso per altri tre capi ammetterà una infinita varietà, i quali sono affatto analoghi ai tre, per cui si diversifica il pendolo di tre pesi C, N, B, essendo dato quello di due B, C: e così per tali elementi si amplierà la variazione nei pendoli di quattro masse, per vedersi in quelli di cinque &c.

Del centro d'Oscillazione

Dissertazione II.

nel Tomo XXXIV. pag. 161

Dal Giornale di Modena

1786

[illegible]

Del Centro di Oscillazione

Dissertazione II.

Egli è noto come si applichi al centro di oscillazione dei corpi la consueta formola (Fig. 2.) $AG = \frac{B\cdot(AB)^2 + C\cdot(AC)^2}{(B+C)\cdot AK}$ (1.), ed ora è da vedersi l'uso della mia formola $AG = \frac{(AK)^2 + (KB}{AK}$ (2.). La soluzione di alcuni problemi metterà il tutto in chiaro.

Problema I.

Determinare la lunghezza di un pendolo semplice isocrono alla verga sottilissima AD. (Fig. 12.), che si vibra intorno al punto A.

Il centro di gravità K della verga la divide in due parti eguali AK, DK. Dunque $AK = DK = \frac{1}{2}a$, onde si abbia $AD = a$, e segno $KB = KC = x$, $Bb = Cc = dx$, e dinotando le masse ed i pesi delle porzioni minime Bb, Cc della verga AD per le loro lunghezze $Bb = Cc = dx$, avremo per la formola (1.) l'espressione $\frac{\int (AB)^2\cdot Bb + (AC)^2\cdot Cc}{\int (Bb + Cc)\cdot AK} = AG$, ossia analiticamente $\frac{\int (\frac{1}{2}a - x)^2\cdot dx + (\frac{1}{2}a + x)^2\cdot dx}{\int a\,dx} = \frac{\int(\frac{1}{2}a^2 + 2x^2)\cdot dx}{\int a\,dx} = AG$, ed integrando tanto il numeratore, quanto il denominatore, $\frac{\frac{1}{2}a^2x + \frac{2}{3}x^2}{ax} = \frac{3a^2 + 4x^2}{6a} = AG$, lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga $BC = 2x$, che oscilla intorno al punto A collocato fuori dalla stessa nella direzione CBA.

Quando $KB = KC = x = KA = KD = \frac{1}{2}a$, sarà $\frac{2a}{3} = AG$ la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga $AD = a$, che si vibra intorno al punto estremo A.

Che

Che se fosse $KA = KC = x$ e $KA = KD = \frac{1}{2}a$, la verga farebbe le sue vibrazioni intorno al punto A situato dentro la stessa, e posta per esempio $x = a$, sarebbe $AG = \frac{7}{6}a$.

Non ho aggiunta costante nella integrazione; perchè se la lunghezza $BC = 2x$ della verga fosse minima, il pendolo composto si trasformerebbe in semplice, e ne risulterebbe a dovere $AG = \frac{1}{2}a$.

La formola (2.) mi dà $\frac{(AK)^2 + CKB}{AK} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + x^2}{\frac{1}{2}a}$ $= \frac{\frac{1}{4}a^2 dx + x^2 dx}{\frac{1}{2}a dx}$. Integro come sopra il numeratore, ed il denominatore, e mi si presenta $\frac{\frac{1}{4}a^2 x + \frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}ax} = \frac{3a^2 + 4x^2}{6a} = AG$, e quando $x = \frac{1}{2}a$, $AG = \frac{2a}{3}$, qualmente col mezzo della formola (1. ho scoperto.

Scolio I.

Girata intorno al punto K (Fig. 18.) la verga AD raccomandata alla verga AK priva di inerzia, e di gravità, con cui formi l'angolo qualunque dato AKA'; dico che si vibrerà intorno al punto A nello stesso tempo, in cui vibrasi la verga AD. Questa verità è patente per la formola (2.), che suggerisce l'espressione sopra determinata $\frac{(AK)^2 + CKB}{AK} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + x^2}{\frac{1}{2}a}$ $= \frac{\frac{1}{4}a^2 dx + x^2 dx}{\frac{1}{2}a dx}$, e quindi dopo la doppia integrazione, $AG = \frac{3a^2 + 4x^2}{6a}$, e posta $x = \frac{1}{2}a$, $AG = \frac{2a}{3}$.

Esige la formola (1.) più lungo giro di raziocinio. Si tirino normali ad AD le rette $A'E$, AH, IC, $D'F$, e siano $A'E = D'F = \frac{ma}{2}$, $EK = FK = \frac{na}{2}$; e poichè $(A'E)^2 + (EK)^2 = (A'K)^2$, avremo $\frac{m^2a^2 + n^2a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, e per conseguenza $m^2 + n^2 = 1$. Similmente pongo $BH = CI = mx$,

HK

$HK = IK = nx$, onde ne provenga $AH = \frac{1}{2}a - nx$, $AI = \frac{1}{2}a + nx$. Avremo pertanto $(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 = \frac{1}{4}a^2 - nax + n^2x^2 + m^2x^2 = \frac{1}{4}a^2 - nax + x^2$, $(AC)^2 = (AI)^2 + (CI)^2 = \frac{1}{4}a^2 + nax + n^2x^2 + m^2x^2 = \frac{1}{4}a^2 + nax + x^2$, e perciò $(AA)^2 + (AC)^2 = \frac{a^2}{2} + 2x^2$. Per la qual cosa $\frac{(AA)^2 . Ab + (AC)^2 . Cc}{(Ab + Cc) . AK} = \frac{(\frac{1}{4}a^2 + x^2) . dx}{\frac{1}{2}adx}$, e finalmente $\frac{\int(\frac{1}{4}a^2 + x^2) . dx}{\int \frac{1}{2}adx} = \frac{3a^2 + 4x^2}{6a} = AG$, e posta $x = \frac{1}{2}a$, $AG = \frac{2a}{3}$, come mediante la formola (2.) ho determinato.

Scolio II.

Il Problema I. si poteva sciogliere più semplicemente usando (fig. 19.) la formola $\frac{(AA)^2 . Ab}{AA . Ab} = \frac{z^2dz}{zdz}$, ponendo $AA = z$, $Ab = dz$. Dalla integrazione del numeratore, e del denominatore ne raccolgo $\frac{\frac{1}{3}z^3}{\frac{1}{2}z^2} = \frac{2z}{3} = \frac{2a}{3} = AG$, quando $z = a$.

La formola (2.) $\frac{(AK)^2 + AKC}{(AK)}$ relativa alla fig. 2 in questa circostanza coincide colla (1.); imperciocchè considerandosi (fig. 19.) il solo pesetto $Ab = dz$, la distanza del suo centro di gravità dal punto A è $= AA = z$, ed il rettangolo (fig. 2.) $AKC = 0$; laonde essa formola (fig. 19.) prende l'aspetto $\frac{(AA)^2}{AA} = \frac{(AA)^2 . Ab}{AA . Ab} = \frac{z^2dz}{zdz}$, e quindi $\frac{\int z^2dz}{\int zdz} = \frac{2z}{3} = AG$, e quando $z = AD = a$, $AG = \frac{2a}{3}$.

La prima soluzione per altro è più elegante, perchè abbraccia i tre casi, che il punto A, intorno a cui si fa la vibrazione, sia collocato, o nelle estremità della verga, o fuori, o dentro della medesima.

Problema 11.

Determinare la lunghezza di un pendolo semplice isocrono al rettangolo LO (fig. 20.), che si vibra intorno al punto A situato nell'asse se fa di mestieri continuato di esso rettangolo.

Diviso per metà il lato LM, e tirato l'asse AD parallelo ad LN, e partitolo in due porzioni eguali nel punto K, sarà questo il centro di gravità del rettangolo LO. Pongo AK = DK $= \frac{1}{2}a$, $AL = AM = b$, $KH = KI = x$, $Hh = Ii = dx$, $HB = IC = y$, $Ab = Cc = dy$, ed esprimendo per la superficie LO la massa, ed il peso del rettangolo, sarà $Ab.bE = dy\,dx$ il minimo peso, che va moltiplicato secondo la formola (1.) per $(AA)^2 = (AH)^2 + (HA)^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 + y^2$. Non altrimenti sarà $Cc.cF = dy\,dx$ l'infinitesimo peso che dee moltiplicarsi per $(AC)^2 = (AI)^2 + (IC)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 + y^2$. Avremo dunque $(AA)^2.Ab.bE + (AC)^2.Cc.cF = \frac{1}{2}a^2 dy\,dx + 2x^2 dy\,dx + 2y^2 dy\,dx$. Effettuo una prima integrazione supponendo x, e dx costanti, e trovo $\frac{1}{2}a^2 y\,dx + 2yx^2 dx + \frac{2}{3}y^3 dx = \frac{1}{2}a^2 b\,dx + 2bx^2 dx + \frac{2}{3}b^3 dx$, quando $y = b$. Mi inoltro poi alla seconda integrazione supponendo x variabile, e mi si presenta $S((AA)^2.Ab.bE + (AC)^2.Cc.cF) = \frac{a^2bx}{2} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2b^3x}{3}$.

Passo alla considerazione del divisore $AK.(Ab.bE + Cc.cF) = a\,dy\,dx$. La prima integrazione, supposto dx costante, mi dà $ay\,dx = ab\,dx$, quando $y = b$, e dalla seconda integrazione raccolgo $S(AK.(Ab.bE + Cc.cF) = abx$. Il perchè siamo pervenuti alla soluzione del nostro Problema $\frac{S((AA)^2.Ab.bE + (AC)^2.Cc.cF)}{S(AK.(Ab.bE + Cc.cF)}$
$= \frac{\frac{1}{2}a^2bx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{2}{3}b^3x}{abx} = \frac{3a^2 + 4x^2 + 4b^2}{6a} = AG$

lunghezza

lunghezza del pendolo semplice isocrono al rettangolo PS, che si vibra intorno al punto A.

Se $KH = KI = x$ è minore di $KA = KD = \frac{1}{2}a$, il punto A è collocato al di fuori del rettangolo PS.

Ma se $KH = KI = x$ fosse maggiore di $KA = KD = \frac{1}{2}a$, il punto A sarebbe situato al di dentro del mentovato rettangolo.

Posta finalmente $x = \frac{1}{2}a$, il rettangolo oscilla intorno al punto A, ch'è l'estremo dell'asse AD. In questa ipotesi abbiamo $\frac{2a^2+2b^2}{3a} = AG$.

Otterremo lo stesso intento mediante la formola

(2) $\frac{(AK)^2 + AKC}{AK} = \frac{\frac{1}{4}a^2+x^2+y^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{(\frac{1}{4}a^2+x^2+y^2) . dy\,dx}{\frac{1}{2}a\,dy\,dx}$

Fatta la doppia integrazione del numeratore, e del denominatore, scopriremo

$\frac{S(\frac{1}{4}a^2+x^2+y^2) . dy\,dx}{S\frac{1}{2}a\,dy\,dx} = \frac{3a^2+4x^2+4b^2}{6a} = AG$,

quando $y = b$, e se inoltre $x = \frac{1}{2}a$, ne risulterà $\frac{2a^2+2b^2}{3a} = AG$.

Corollario

Supponendo $AL = AM = b = 0$, si determina come nel Problema I. $AG = \frac{2a}{3}$

Scolio I.

Si giri il rettangolo PS, ovvero LO (fig. 21.) intorno al centro K di gravità, dimodoché acquisti la positura stabile AKD, e non variandosi nella formola (2.) $\frac{(AK)^2 + AKC}{AK}$ la misura delle linee AK, AK, KC, richiederà anche in tal circostanza lo stesso pendolo semplice isocrono $AG = \frac{3a^2+4x^2+4b^2}{6a} = \frac{2a^2+2b^2}{3a}$, quando $x = \frac{1}{2}a$.

Scolio II.

Scioglieremo elegantemente il Problema II. anche nella seguente maniera. Sia (fig. 22.) $AL = AM = b$, $AD = a$, $AH = z$, $Hh = dz$,

HA

HA = HC = y, AE = CF = dy, ed avremo per la formola (1.)

$$\frac{((AH)^2+(HB)^2).Ab.BE + ((AH)^2+(HC)^2).Cc.CF}{AH.(Ab.BE+Cc.CF)} =$$

$$\frac{(2z^2+2y^2).dz\,dy}{2z\,2dz\,dy}$$. Integro primieramente il numeratore, ed il denominatore, supponendo costanti z, dz, e trovo $\frac{yz^2dz+\frac{1}{3}y^3dz}{yzdz}$

$= \frac{bz^2dz+\frac{1}{3}b^3dz}{bzdz}$, quando y = b. Torno ad integrare considerando z variabile, e scopro

$\frac{\frac{1}{3}bz^3+\frac{1}{3}b^3z}{\frac{1}{2}bz^2} = \frac{2z^2+2b^2}{3z} = \frac{2a^2+2b^2}{3a} = AG$,

quando z = a, qualmente nella prima soluzione ho determinato.

La formola (2.) mi darà $\frac{(AH)^2+AH.HC}{AH} =$

$\frac{(AH)^2.Ab.BE + AH.HC.Ab.BE}{AH.Ab.BE} = \frac{z^2dz\,dy + y^2dz\,dy}{z\,dz\,dy}$,

formola identica a quella, a cui mi ha condotto la formola (1.), e che mediante la doppia integrazione torna a stabilire $AG = \frac{2a^2+2b^2}{3a}$.

Problema III.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono alle due verghe (Fig. 23.) AD, AE di minima pari grossezza, che formando l'angolo stabile DAE, si vibrano intorno al punto A.

Dal Problema I. sarà $AF = \frac{2}{3}AD$ la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga AD. Non altrimenti sarà $AI = \frac{2}{3}AE$ la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga AE. Intorno ai tre punti A, F, I si descriva il circolo AFGIA, e fatta passare la corda AG pel centro di gravità delle due verghe AD, AE, si agguaglierà essa alla lunghezza cercata del pendolo semplice isocrono alle verghe predette.

S.

Si avverta, che la linea AG taglia la FI nelle due porzioni FK, KI, che stanno in ragione di AI : AF.

Sia AD = a, e perciò $AF = \frac{2}{3}a$, AE = b, e perciò $AI = \frac{2}{3}b$, e similmente DE = c, $FI = \frac{2}{3}c$. Scopriremo $FK = \frac{2bc}{3\cdot(a+b)}$, $KI = \frac{2ac}{3\cdot(a+b)}$. Tirata AL normale ad FI, chiaro apparisce essere $(AF)^2 - (FL)^2 = (AI)^2 - (IL)^2$: ma $IL = FI - FL$, ed $(IL)^2 = (FI)^2 - 2FI.FL + (FL)^2$; dunque $(AF)^2 = (AI)^2 - (FI)^2 + 2FI.FL$, e quindi $\frac{(FI)^2 + (AF)^2 - (AI)^2}{2FI} = FL$; e sostituiti i valori analitici $FL = \frac{\frac{4}{9}c^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{9}b^2}{\frac{4}{3}c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{3c}$. Avremo inoltre $LK = FK - FL = \frac{2bc}{3\cdot(a+b)} - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{3c} = \frac{(b-a)\cdot c^2 + (a+b)\cdot(b^2 - a^2)}{3c\cdot(a+b)}$, $AL = \sqrt{((AF)^2 - (FL)^2)}$

$= \sqrt{\left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{9c^2}\right)} = \frac{\sqrt{((2a^2 - c^2).c^2 + (2b^2 - a^2).a^2 + (2c^2 - b^2).b^2)}}{3c}$

$AK = \sqrt{((AL)^2 + (LK)^2)} = \sqrt{\left(\frac{(2a^2 - c^2).c^2 + (2b^2 - a^2).a^2 + (2c^2 - b^2).b^2}{9c^2} + \frac{(b-a)^2.(b^2 + 2ab + a^2 + c^2)^2}{9c^2.(b+a)^2}\right)} = \frac{\sqrt{(2a^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 2b^4 - 4abc^2)}}{3\cdot(a+b)}$.

Essendo adunque per la proprietà del circolo AFGIA, $\frac{FK.KI + (AK)^2}{AK} = AG$, dalla surrogazione dei valori analitici ne nascerà $AG = \frac{2\cdot(a^3 + b^3)}{3\sqrt{(a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 - abc^2)}}$

Ci riuscirà parimente di sciogliere il nostro Problema col mezzo della formola

$\frac{S((AB)^2.Bb + (AC)^2.Cc)}{S(AH.(Bb + Cc))}$ dedotta dalla formola (1.)

nella seguente maniera: Sia, tirata BC parallela a DE, AB = z, Bb = dz, AC = nz; Cc = ndz; AH = mz, ed avremo $\frac{(AB)^2.Bb + (AC)^2.Cc}{AH.(Bb + Cc)} = \frac{z^2dz + n^3z^2dz}{mz.(1+n).dz}$. Integrando il numeratore ed il denominatore ne proverrà $\frac{(1+n^3).\frac{z^3}{3}}{(1+n).\frac{mz^2}{2}} = \frac{(1+n^3).2z}{(1+n).3m}$, e quando z = a, scopriremo AG =

$= \frac{(1+n^3) \cdot 2a}{(1+n) \cdot 3m}$. Essendo $AD = a : AE = b ::$ $1 : n$, si determina $n = \frac{b}{a}$. Abbiamo in oltre $AF = \frac{2}{3}a : AK = \frac{2\sqrt{(a^4+a^3b+ab^3+b^4-abc^2)}}{3 \cdot (a+b)}$ $:: 1 : m$, analogia che mi dà $m = \frac{\sqrt{(a^4+a^3b+ab^3+b^4-abc^2)}}{a \cdot (a+b)}$. Sostituiti in cambio di n, m i loro valori, ne risulterà $AG = \frac{2 \cdot (a^3+b^3)}{3\sqrt{(a^4+a^3b+ab^3+b^4-abc^2)}}$ come nella prima soluzione.

Corollario I.

Sia nullo l'angolo DAE, ed accaderà che diventi $DE = AE - AD$, e per conseguenza $c = b - a$. Surrogato questo valore nella scoperta formola, si troverà $AG = \frac{2 \cdot (a^3+b^3)}{3 \cdot (a^2+b^2)}$, e se fosse $a = b$, ne nascerebbe $AG = \frac{2}{3}a$ come nel Problema I.

Corollario II.

Se l'angolo DAE fosse uguale a due retti, ne risulterebbe $DE = DA + AE$, cioè $c = a + b$. Si ponga un tal valore in cambio di c nella nostra formola, e ne proverrà $AG = \frac{2 \cdot (a^3+b^3)}{3\sqrt{(a^4-2a^2b^2+b^4)}}$, e supponendo $AD = a = AE = b$, si scoprirebbe $AG = \infty$.

Scolio.

~~Si girino le due verghe DA, AE intorno al comune loro centro di gravità H, e prendano altra costante posizione qualunque indicata (Fig. [illegible]) dalle lettere D'A'E'. Supponendo allora comandate dalle due verghe AH e A'H [illegible] prima che incominciasse di gravità, facciano come prima le loro oscillazioni intorno al punto A, dico che non si varierà la lunghezza AG del pendolo semplice [illegible]. E di fatti [illegible] lunghezze e le relative posizioni delle linee~~ A'D'

~~[illegible] lunghezza del pendolo semplice isocrono [illegible] $\frac{[illegible]}{(1+m).3m}$ [illegible] della [illegible] del pendolo semplice [illegible] nella stessa linea retta [illegible] della [illegible]~~

Scolio [illegible]

La lunghezza AG (Fig. 23.) del pendolo semplice isocrono ~~[illegible]~~ si conserva ~~[illegible]~~ girando ciascuna verga AD, AE intorno al particolare centro di gravità B, C., onde per esempio si adattino dalla Fig. 24. La dimostrazione non è che un

Corollario

Corollario della Scolio I. dopo il Problema I., ed io ben volentieri lo lascio determinare all'industria di chi legge.

Problema IV.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono al triangolo isoscele NAO (fig. 28), che si vibra intorno al punto A.

Condotta la retta AD normale alla base NO, la divide in due parti eguali, e passa pel centro K di gravità del triangolo NAO. Pongo AD = a, DN = DO = b, e tagliata ad arbitrio AH = z, e supposta Hh = dz, delineo LHM paralela ad NO, e segno HB = HC = y, BE = CF = dy. Descrivo inoltre le linee AB, AC. Esprimendo per la superficie NAON la massa, ed il peso del triangolo, i rettangoletti Eb = dz dy, Fc = dz dy dinoteranno le minime porzioni di triangolo, che secondo la formula (1) vanno applicate alle verghe AB, AC. Avremo dunque per la detta formula l'espressione

$$\frac{(AB)^2 \cdot BE \cdot Bb + (AC)^2 \cdot CF \cdot Cc}{AH \cdot (BE \cdot Bb + CF \cdot Cc)} = \frac{(AB)^2 \cdot BE \cdot Bb}{AH \cdot BE \cdot Bb} = \frac{(z^2+y^2) \cdot dy\,dz}{z\,dy\,dz}$$

. Non altrimenti la formula (2.) ci darà

$$\frac{((AH)^2 + BHC) \cdot BE \cdot Bb}{AH \cdot BE \cdot Bb} = \frac{(z^2+y^2) \cdot dy\,dz}{z\,dy\,dz},$$

dimodochè e l'una, e l'altra ci guida alla medesima conseguenza. Avverto che stando

AD : DN :: AH : HL

$a : b :: z : \frac{bz}{a}$, ne proviene

$HL = \frac{bz}{a}$. Integro primieramente il numeratore, ed il denominatore della scoperta formula supponendo soltanto y variabile, e mi si presenta

$$\frac{yz^2dz + \frac{1}{3}y^3dz}{yz\,dz} = \frac{\frac{b}{a}z^3dz + \frac{1}{3}\frac{b^3z^3dz}{a^3}}{\frac{b}{a}z^2dz} = \frac{(a^2+\frac{1}{3}b^2) \cdot z^3dz}{a^2z^2dz},$$

quando $HB = y = HL = \frac{bz}{a}$. Replico l'integrazione

supponendo

supponendo z variabile, e scopro
$\frac{(a^2+\frac{1}{3}b^2)\cdot\frac{1}{4}z^4}{a^2\cdot\frac{1}{3}z^3} = \frac{(3a^2+b^2)\cdot z}{4a^2}$; ed ho finalmente, quando $AH = z = AD = a$, $\frac{3a^2+b^2}{4a} = AG$ lunghezza del pendolo semplice isocrono al triangolo NAO. Non ho aggiunta costante; perchè posta $AH = z = o$, si trova rettamente $AG = o$.

Corollario I.

Nell' ipotesi di $AD = a$ minima si scopre $AG = \infty$; perchè in tal circostanza il triangolo NAO avrebbe il suo centro di gravità infinitamente prossimo al centro A di sospensione.

Corollario II.

Se $DN = b = AD = a$, ne risulta $AG = AD = a$. ~~Abbiamo veduto~~ nello Scolio I. dopo il Problema III. della Dissertazione I., che se una circonferenza circolare oscilli intorno ad un suo punto, le corrisponda un pendolo semplice isocrono lungo quanto il suo diametro. Per la qual cosa un triangolo isoscele NAO, in cui fosse NO doppia di AD, farebbe le sue vibrazioni sincrone a quelle di una circonferenza circolare, il cui diametro $= AD$, la quale si vibri intorno al punto A.

Problema V.

Trovare la lunghezza del pendolo semplice isocrono al triangolo NAO (Fig. 161.), i cui lati AN, AO sono disuguali, il quale oscilla intorno al punto A.

Descrivo la linea AD, che divida la base NO in due parti eguali ND, DO, e conduco AP normale, ad NO. Pongo $AD = a$, $DN = DO = b$,

AP

$AP = ma$, $PD = na$, e segnata $AH = z$, $Hh = dz$, e menate pei punti H, h le due rette parallele ad NO, ed Hv parallela ad AP, sarà $AQ = mz$, $QH = nz$, $Hv = mdz$. Taglio $HA = HC = y$, $AE = CF = dy$, e compiuti i rettangoli Eb, $Fc = dymdz$, descrivo le linee AA, AC. La similitudine dei triangoli ADN, AHL; ADO, AHM determina $HL = HM = \frac{bz}{a}$.

Si rifletta essere $QA = HA - HQ = y - nz$, $QC = HC + HQ = y + nz$, e quindi $(AA)^2 = m^2z^2 + y^2 - 2ynz + n^2z^2$, $(AC)^2 = m^2z^2 + y^2 + 2ynz + n^2z^2$. La formola (1.) mi somministra l'espressione $\frac{(AA)^2 . AE . Ab + (AC)^2 . CF . Cc}{AH . (AE . Ab + CF . Cc)}$. Sostituiti i valori analitici, e fatta la riflessione essere $m^2 + n^2 = 1$, ed espurgata la formola, prenderà essa il seguente aspetto $\frac{(z^2 + y^2) . dydz}{2dydz}$ totalmente uniforme a quello, che abbiamo scoperto sciogliendo il precedente Problema IV. Effettuata come nel detto Problema la doppia integrazione nel numeratore, e nel denominatore, torneremo a trovare la lunghezza del pendolo semplice isocrono $AG = \frac{3a^2 + b^2}{4a}$

Corollario.

Due triangoli, in cui sia NO (fig. 25.) = NO (fig. 26.), AD (fig. 25.) = AD (fig. 26.) colla condizione, che la linea AD divida per metà la base NO, richiedono lo stesso pendolo semplice isocrono $AG = \frac{3a^2 + b^2}{4a}$. La verità di questa conseguenza, che a prima vista sorprende, è resa manifesta dalla mia formola $\frac{((AH)^2 + AHC) . AE . Ab}{AH . AE . Ab} = \frac{(z^2 + y^2) . dydz}{2dydz}$

=

$= \frac{(z^2+y^2)\cdot dy\, m\, dz}{2dy\, m\, dz}$, che si accomuna ad entrambi i triangoli. E quindi apparisca chiaramente l'utilità di essa formola.

Problema VI.

Tirata (fig. 25. 26?) RS parallela ad NO, determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie RNOS, che si vibra intorno al punto A.

Pongo AT = c, TH = z, e ritenute l'altre denominazioni, ho per la formola (2.)

$$\frac{((AH)^2+BHC)\cdot BE\cdot AG}{AH\cdot BE\cdot AG} = \frac{(c^2+2cz+z^2+y^2)\cdot dy dz}{(c+z)\cdot dy dz}.$$

Faccio l'integrazione del numeratore, e del denominatore supponendo soltanto y variabile, e trovo $\frac{c^2ydz+2cyzdz+yz^2dz+\frac{y^3}{3}dz}{cydz+yzdz}$. La similitudine dei triangoli ADN, AHL determina $HL = \frac{b}{a}\cdot(c+z)$. Avremo dunque, quando $HB = y = HL = \frac{b}{a}\cdot(c+z)$

$$\frac{c^3dz + c^2zdz + 2c^2zdz + 3cz^2dz + z^3dz + \frac{b^2}{3a^2}\cdot(c^3+3c^2z+3cz^2+z^3)\cdot dz}{c^2dz+2czdz+z^2dz}$$

$$= \frac{(3a^2+b^2)\cdot(c^3dz+3c^2zdz+3cz^2dz+z^3dz)}{3a^2\cdot(c^2dz+2czdz+z^2dz)}.$$

Passo all'integrazione del numeratore, e del denominatore, e mi si presenta

$\frac{(3a^2+b^2)\cdot(c^3+\frac{3}{2}c^2z+cz^2+\frac{1}{4}z^3)}{3a^2\cdot(c^2+cz+\frac{1}{3}z^2)}$, e quando $TH = z = TD = a-c$, pervengo alla determinazione della lunghezza del pendolo semplice $AV = \frac{(3a^2+b^2)\cdot(a^3+a^2c+ac^2+c^3)}{4a\cdot(a^3+a^2c+ac^2)}$, ridotta che sia la formola: ....

Corollario I.

Se AT = c = 0, scopriremo $AV = \frac{3a^2+b^2}{4a} =$ AG, come nel Problema V.

Corollario II.

Corollario II.

Che se $AT = c = AD = a$, la superficie RNOS si trasforma nella linea NO, ossia in una sottilissima verga, ed in tal ipotesi si trova $AV = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$. Posto che sia $ND = b = AD = a$, ne proverrà $AV = \frac{4a}{3}$. Nel Problema I. abbiamo trovato la lunghezza del pendolo semplice isocrono (Fig. 17.) alla verga AD, cioè $AG = \frac{2a}{3}$; perchè in esso la distanza del punto A del centro di gravità della verga si è espressa per $\frac{1}{2}a$. Se l'avessi posta $= a$; come nel presente Corollario, ne sarebbe risultato $AG = \frac{4a}{3}$. Quando girandosi la verga NO intorno al suo centro D di gravità, si sovrapponga alla linea AD, il punto per esempio N cada in A, e ci si offerisce il caso principalmente considerato in esso Problema I., che una verga si vibri intorno ad un de' suoi punti estremi. Il presente Corollario conferma lo Scolio I. del mentovato Problema, e fa vedere che altresì nella positura NO la verga vibrata, che il pendolo semplice isocrono abbia la lunghezza $AV = \frac{4a}{3}$.

Supponendo la verga NO sovrapposta alla retta AD, se $DN < DA$, cioè $b < a$, la verga si vibra intorno ad un punto situato fuori della sua lunghezza, e se $b > a$, il punto di sospensione è collocato al di dentro; e quindi la formola $AV = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$ scioglie generalmente il Problema, qualunque sia l'angolo NDA.

Problema VII.

Problema VII.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono ad una circonferenza circolare, o ad una sua porzione, che mezza a destra e mezza a sinistra oscilla o intorno ad un de' suoi punti, ovvero intorno ad un punto collocato o fuori, o dentro della medesima.

Nello Scolio I. dopo il Problema III. della Dissertazione I. ho dimostrato, che una circonferenza di circolo in tutti i suoi elementi ugualmente grave, la qual oscilli intorno ad uno de' suoi punti, richiede il pendolo semplice isocrono lungo quanto il suo diametro. Ora sciolgo il Problema generalmente.

Dal centro di suspensione A (fig. 25.), e pel centro K del circolo EADCE si tiri la retta AKD, e sia AE = c, EK = a. Segnati i due archi eguali EB = EC = s, ed i minimi elementi Bb = Cc = ds, e tirata la linea BC; sia EH = z, HB = HC = y = $\sqrt{(2az - z^2)}$, e poichè $ds = \frac{adz}{\sqrt{(2az-z^2)}}$, avremo per la formola

$$(1)\ \frac{S((AB)^2 \cdot Bb + (AC)^2 \cdot Cc)}{S(AH \cdot (Bb + Cc)} = \frac{S((c^2 + 2cz + 2az) \cdot \frac{adz}{\sqrt{(2az - z^2)}})}{S((c + z) \cdot \frac{adz}{\sqrt{(2az - z^2}}}$$

= AG lunghezza del pendolo semplice isocrono all'arco circolare BEC, che oscilla intorno al punto A. La stessa espressione parimente somministra la formola (2).

$$\frac{S(((AH)^2 + AHC) \cdot Bb)}{S(AH \cdot Bb)}.$$

A cagione di integrare agevolmente la scoperta formola, la dispongo nella seguente maniera.

$$\frac{S((c^2 + 2ac + 2a^2) \cdot \frac{adz}{\sqrt{(2az - z^2)}} + (2ac + 2a^2) \cdot (\frac{-adz + zdz}{\sqrt{(2az - z^2)}}))}{S((c + a) \cdot \frac{adz}{\sqrt{(2az - z^2)}} + a \cdot \frac{(-adz + zdz)}{\sqrt{(2az - z^2)}})}$$

=

$$= \frac{(c^2+2ac+2a^2).s-(2ac+2a^2)\sqrt{(2az-z^2)}}{(c+a).s-a\sqrt{(2az-z^2)}} = AG.$$

Non aggiunge costante; perchè, come vedremo nel seguente Corollario, dee tralasciarsi.

Corollario I.

Supposto minimo l'arco EA = s, abbiamo HA = y = $\sqrt{(2az-z^2)}$ = s, e perciò ne proviene AG = AE = c, come infatti dovea trovarsi, essendo in tal caso semplice il pendolo A, AEC. Rettamente adunque si è tralasciata la costante.

Corollario II.

Se z = ED = 2a, onde la circonferenza intera si vibri intorno al punto A, sarà HA = y = $\sqrt{(2az-z^2)}$ = 0, e conseguentemente $AG = \frac{c^2+2ac+2a^2}{c+a}$.

Corollario III.

Sia AE = c = a, e ne risulterà $AG = \frac{2a^2.(s-\sqrt{(2az-z^2)})}{a.(s-\sqrt{(2az-z^2)})}$ = 2a, qualunque valore relativo si assegni ad s, ed a z. Il perchè la circonferenza intera circolare, e qualsivoglia sua porzione AEC, che si vibri intorno al punto medio E, richiede lo stesso pendolo semplice isocrono, la cui lunghezza ED = 2a.

Corollario IV.

Si assegni a c un valore negativo, onde le oscillazioni si facciano intorno ad un punto A' situato dentro la circonferenza circolare, e la formola prenderà l'aspetto che segue.

$$AG = \frac{(c^2-2ac+2a^2).s+(2ac-2a^2).\sqrt{(2az-z^2)}}{(-c+a).s-a\sqrt{(2az-z^2)}}$$

Corollario V.

Nell'ipotesi di EA = s minima, in cui HA = $\sqrt{(2az-z^2)}$ = EA = s, ms insegna la formola essere A'G = −c = −A'E, il che significa dover avere il pendolo semplice isocrono la direzione da

A'

A'verso D . . . . A.

Corollario VI.

Suppongasi $c = a$, onde il punto A' coincida con K; e scopriremo $A'G = \frac{as}{-\sqrt{(2az-z^2)}}$. Se s sia uguale al quadrante, e AEC un semicircolo, avremo $-\sqrt{(2az-z^2)} = -a$, e quindi $A'G = -s$, cioè la lunghezza del pendolo semplice isocrono per la divarcazione A'D uguale al quadrante.

Corollario VII.

Finalmente se fingasi, che l'intera circonferenza si vibri intorno al suo centro K di figura, e di gravità, essendo in tal circostanza $z = 2a$, $y = \sqrt{(2az+z^2)} = 0$, scopriremo $A'G = -\frac{as}{0} = -\infty$. Da questa conseguenza impariamo, che l'intera circonferenza circolare non può oscillare intorno al suo centro di gravità; perchè il peso della stessa non eserciterebbe azione veruna.

Problema VIII.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono ad una superficie circolare, o ad una sua porzione, che mezza a destra, e mezza a sinistra oscilla o intorno ad un punto della sua circonferenza, ovvero intorno ad un punto situato o dentro, o fuori della medesima.

Fatta la preparazione espressa nella Fig. 26. pongo $AI = c$, $IK = KD = a$, $IH = z$, $Hh = dz$, $HA = HC = y$, $AE = CF = dy$, e per la formola (1.) trovo

$$\frac{(AA)^2 . BE . Ab + (AC)^2 . CF . Cc}{AH . (AE . Ab + CF . Cc)} = \frac{(c^2+2cz+z^2+y^2) . dy\,dz}{(c+z) . dy\,dz}$$

Lo stesso valore analitico ci somministra ancor la formola (2) $\frac{((AH)^2 + AHC) . AE . Ab}{AH . AE . Ab}$. Effettuo primieramente l'integrazione del numeratore, e del denominatore supponendo soltanto y variabile, e mi si presenta

$c^2 y\,dz$

$$\frac{c^2 y\,dz + 2cyz\,dz + yz^2 dz + \frac{y^3}{3} dz}{y\cdot(c\,dz + z\,dz)}$$, e quando HA

$= y = HL = \sqrt{(2az-z^2)}$

$$\frac{c^2\sqrt{(2az-z^2)}.dz + 2c\sqrt{(2az-z^2)}.z\,dz + \sqrt{(2az-z^2)}.z^2 dz}{\sqrt{(2az-z^2)}.(c\,dz+z\,dz)}$$

$$+\frac{\sqrt{(2az-z^2)}.\frac{(2az\,dz - z^2 dz)}{3}}{\sqrt{(2az-z^2)}.(c\,dz+z\,dz)} =$$

$$\frac{(c^2+2cz+z^2).\sqrt{(2az-z^2)}.dz + (\frac{2az-z^2}{3}).\sqrt{(2az-z^2)}.dz}{(c+z).\sqrt{(2az-z^2)}.dz}$$

La sommatoria del numeratore di questa formola divisa per la sommatoria del denominatore determina la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie circolare LIML, che oscilla intorno al punto A.

Per ottenere la doppia integrazione, dispongo la formola nella seguente maniera

$$\frac{\int(c^2+(2c+\frac{2a}{3}).z).\sqrt{(2az-z^2)}.dz + \int(\frac{2}{3}z^2\sqrt{(2az-z^2)}dz)}{\int(c+z)\sqrt{(2az-z^2)}dz}$$

Cominciando dall'integrare il denominatore, egli è chiaro essere $\int(c+z).\sqrt{(2az-z^2)}.dz =$ $\int(c+a)\sqrt{(2az-z^2)}.dz - \sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz - z\,dz)$. Ora poichè $D\frac{1}{3}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz-z\,dz)$, scopriremo $\int(c+z).\sqrt{(2az-z^2)}.dz =$ $\int(c+a)\sqrt{(2az-z^2)}.dz - \sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz-z\,dz) =$ $(c+a).\frac{LIML}{2} - \frac{1}{3}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}$.

Passo all'integrazione del primo termine del numeratore $= \int(c^2+(2c+\frac{2}{3}a).z).\sqrt{(2az-z^2)}.dz =$ $\int(c^2+2ac+\frac{2a^2}{3}).\sqrt{(2az-z^2)}dz - (2c+\frac{2a}{3})\sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz-z\,dz)$ $=(c^2+2ac+\frac{2a^2}{3}).\frac{LIML}{2} - (2c+\frac{2a}{3}).\frac{1}{3}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}$.

Maggior difficoltà si incontra nell'integrare il secondo termine $= \int\frac{2}{3}z^2\sqrt{(2az-z^2)}.dz$. Questa sommatoria si può esprimer così

$\int\frac{2}{3}z^2 dz\sqrt{(2az-z^2)} =$

$$\int\Big(-\frac{\sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz-z\,dz).z}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{(2az-z^2)}.(2az-z^2).dz - \sqrt{(2az-z^2)}.(a\,dz-z\,dz).\frac{5a}{6} + \frac{5a^2\sqrt{(2az-z^2)}.dz}{6}\Big)$$

=

$= -\frac{1}{6}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}.z - \frac{5}{14}a(2az-z^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5a^2.\,LIML}{12}$

Quindi ne inferiremo ...

$$\frac{\int\left((c^2+2cz+z^2)\sqrt{(2az-z^2)}\,dz + \left(\frac{2az-z^2}{3}\right)\sqrt{(2az-z^2)}.dz\right)}{\int(c+z)\sqrt{(2az-z^2)}.dz} =$$

$$\frac{(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2).\,LIHL - \left(\frac{2}{3}c+\frac{1}{2}a+\frac{z}{8}\right).(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+a).\,LIHL - \frac{1}{3}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}} = AG$$

lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie circolare LIML, che oscilla intorno al punto A.

Corollario I.

Posta $z=2a$, abbiamo $\frac{(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2).\,DLID}{(c+a).\,DLID} =$ $\frac{2c^2+4ca+3a^2}{2.(c+a)} = AG$, e se a fosse minima, si scoprirebbe $c = AG$, come infatti dee stare, il che fa vedere essersi rettamente tralasciata l'aggiunta della costante. La stessa conseguenza si incontra supponendo a finita, e z minima. In tal circostanza $LIHL = \frac{2}{3}.IH.HL = \frac{2z}{3}\sqrt{2az} =$ $\sqrt{\left(\frac{8az^3}{9}\right)}$, e perciò $AG = \frac{(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2)\sqrt{\left(\frac{8az^3}{9}\right)} - \left(\frac{2c}{3}+\frac{1}{2}a\right)\sqrt{8a^3z^3}}{(c+a).\sqrt{\left(\frac{8az^3}{9}\right)} - \frac{1}{3}\sqrt{8a^3z^3}}$

e ridotto il computo $AG = c = AI$.

Corollario II.

Se $AI = c = 0$, si scopre $AG = \frac{\frac{3}{2}a^2.\,LIHL - \left(\frac{1}{2}a+\frac{z}{8}\right).(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}}{a.LIHL - \frac{1}{3}(2az-z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

e quando $z=2a$, $AG = \frac{3}{2}a$, lunghezza del pendolo semplice isocrono al circolo ILDMI, che si vibra intorno al punto I della sua circonferenza. Che se fosse z minima, ho già notato essere $LIHL = \sqrt{\left(\frac{8az^3}{9}\right)}$. Abbiamo inoltre $\sqrt{(2az-z^2)} = \sqrt{(2az)} - \frac{z^2}{2\sqrt{(2az)}}$, $(2az-z^2)^{\frac{3}{2}} =$ $2az\sqrt{(2az)} - \frac{3}{2}z^2\sqrt{(2az)}$, $-\left(\frac{1}{2}a+\frac{z}{8}\right).(2az-z^2)^{\frac{3}{2}} =$ $-a^2z\sqrt{(2az)} + \frac{5}{12}az^2\sqrt{(2az)}$, e dal calcolo si raccoglie $AG = \frac{5}{8}a$, cioè a dire che l'infinitesima porzione LIML di superficie circolare, che oscilla intorno al punto I, richiede la lunghezza del

pendolo

pendolo semplice isocrono $= AG = \frac{5}{n}a$.

Corollario III.

Sia $AI = c$ negativa $= A'I$, e la formola prenderà il seguente aspetto $A'G =$

$$\frac{(c^2 - 2ac + \frac{3}{2}a^2).LIHL + (\frac{2c}{3} - \frac{1}{2}a - \frac{z}{n}).(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}}{(a-c).LIHL - \frac{2}{3}(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e qualora $z = 2a$, $A'G = \frac{c^2 - 2ac + \frac{3}{2}a^2}{a-c}$. Stabilito in questa formola $c = IA' = b$, ovvero $c = IA'' = 2a - b$, si troverà lo stesso valore di $A'G$, $A''G$ nel primo caso positivo da A' verso D, e nel secondo negativo da A'' verso I, il che non fa differenza; perchè nel vibrarsi il pendolo può far transito dalla diversione positiva alla negativa. Sostituiti nella formola i predetti valori in cambio di c, scopriremo nel primo caso $A'G = \frac{b^2 - 2ab + \frac{3}{2}a^2}{a-b}$, e nel secondo $A''G = \frac{4a^2 - 4ab + b^2 - 4a^2 + 2ab + \frac{3}{2}a^2}{a - 2a + b}$
$= \frac{b^2 - 2ab + \frac{3}{2}a^2}{-a+b}$.

Suppongasi $c = a$, e ne proverrà $A'G =$

$$\frac{\frac{1}{2}a^2.LIHL + (\frac{a-z}{n}).(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{3}(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e quando $IH = z = ID = 2a$, ci si presenterà $A'G = \frac{\frac{1}{2}a^2.ILDI}{0} = \infty$, il che significa, che il circolo $ILDMI$ non può oscillare intorno al punto K, che il suo centro di gravità.

Considero finalmente z minima, e sostituiti in luogo di $LIHL$, e di $(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}$ i loro valori, ne nascerà $A'G = \frac{c^2}{-c} = -c = -A'I$, lunghezza da prendersi da A' verso D del pendolo semplice isocrono al composto $A', LIMHL$, che si vibra intorno al punto A'.

Problema IX.

Problema IX.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie circolare KILKMDK (Fig. 29.), che si vibra intorno al punto A.

La soluzione del Problema considerato sotto questo nuovo aspetto riesce molto più facile. Sia $AI = c$, $IK = a$; $KA = KC = x$, $AE = CF = dx$, $IL = DM = s$, $Ll = Mm = ds$. Facciasi

$KL : Ll :: KB : Ab$

$a : ds :: x : \frac{x\,ds}{a}$, e si scoprirà $Ab = Cc = \frac{x\,ds}{a}$. Avremo dunque per la formola (2) $\frac{((AK)^2 + BKC).AE.Ab}{AK.AE.Ab}$, e analiticamente $\frac{(c^2+2ac+a^2+x^2).\frac{x\,dx\,ds}{a}}{(c+a).\frac{x\,dx\,ds}{a}}$. Effettuata una prima integrazione del numeratore, e del denominatore supponendo ds costante, e mi si presenta $\frac{(c^2+2ac+a^2).\frac{x^2 ds}{2a} + \frac{x^4 ds}{4a}}{(c+a).\frac{x^2 ds}{2a}}$; e quando $x = a$, $\frac{(c^2+2ac+a^2).\frac{a\,ds}{2} + \frac{a^3 ds}{4}}{(c+a).\frac{a\,ds}{2}}$, e di nuovo integrando $\frac{(c^2+2ac+a^2).\frac{as}{2} + \frac{a^3 s}{4}}{(c+a).\frac{as}{2}} = \frac{c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2}{c+a}$ $= AG$ lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie circolare KILKMDK, che si vibra intorno al punto A, qualunque sia il valore dell'arco $IL = s$, e per conseguenza ancora all'intero circolo. Cotal formola si accorda con quella, che ho determinata nella prima soluzione, quando oscilla il circolo intero.

Corollario I.

Nulla alterandosi la formola $\frac{((AK)^2 + BKC).AE.Ab}{AK.AE.Ab}$, se la superficie KILKMDK si gira intorno al centro K, ne segue che in qualsivoglia sua posizione starà costante la lunghezza del pendolo semplice

semplice isocrono.

Corollario II.

Se $AI = c = 0$, ne risulta $AG = \frac{3}{2}a$.

Corollario III.

E posto $c = IA'$, cioè a dire negativa, scopriremo $A'G = \frac{c^2 - 2ac + \frac{3}{2}a^2}{a-c}$.

Corollario IV.

E quando $c = a$, si trova $A'G = \frac{\frac{1}{2}a}{0} = \infty$.

Corollario V.

Ponendo per ultimo $c = 2a$, onde il punto A' cada in D, ci si affaccierà $DG = -\frac{3}{2}a$, valore negativo, che preso positivamente si eguaglia a quello adattato alla ipotesi di $c = 0$; sopra di che veggasi ciò che ho scritto nel Corollario III. del Problema VIII.

Problema X.

Stabilire la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla aggregata (fig. 30.) del rettangolo LO, e del circolo $IPDQI$, che oscilla intorno al punto A.

Sia $AI = c$ la lunghezza del rettangolo LO, $NO = 2b$ la sua larghezza; e l'aja $LO = 2bc$. Il suo centro H di gravità disterà da K centro di gravità del circolo, il cui raggio $IK = a$, per $\frac{1}{2}c + a$. Supposta la semicirconferenza $IPD = na$, sarà l'aja del circolo $= na^2$. Si troverà il comune centro di gravità R di queste due superficie col mezzo della analogia

$HR : RK = HK - HR :: IPDQI : LO$, e sostituendo i valori analitici delle quantità note

$HR : \frac{1}{2}c + a - HR :: na^2 : 2bc$, e componendo

$HR : \frac{1}{2}c + a :: na^2 : 2bc + na^2$. Quindi

$HR = \frac{(\frac{1}{2}c + a).na^2}{2bc + na^2}$, $RK = \frac{(\frac{1}{2}c + a).2bc}{2bc + na^2}$, e per conseguenza $AR = AH + HR = \frac{1}{2}c + \frac{(\frac{1}{2}c + a).na^2}{2bc + na^2} =$

bc^2

$$\frac{bc^2+(c+a).na^2}{2bc+na^2}.$$

La soluzione di questo Problema non è che un Corollario dei Problemi II. e VIII. Dal Problema II. Scolio II. abbiamo (Fig. 22.); sostituendo c in cambio di 2a;

$S(((AH)^2+(HA)^2).Ab.BE+((AH)^2+(HC)^2).Cc.CF) = \frac{2bc^3+2b^3c}{3}$, quando $AH = AD = c$, $HA = HC = DN = DO = b$. Inoltre pel Problema VIII. abbiamo (Fig. 26.)

$S(((AH)^2+(HB)^2).Ab.AE+((AH)^2+(HC)^2).Cc.CF) = (c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2).na^2$, quando $AH = AD = c+a$, $HB = HC = a$. Il numeratore adunque della frazione, che determina la lunghezza del pendolo semplice isocrono, sarà $= \frac{2bc^3+2b^3c}{3}+(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2).na^2$.

Il denominatore si uguaglierà nel (Fig. 30.) ad $(LO+IPDQI).AR = (2bc+na^2).\left(\frac{bc^2+(c+a).na^2}{2bc+na^2}\right) = bc^2+(c+a).na^2$. Avremo pertanto

$$\frac{\frac{2bc^3+2b^3c}{3}+(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2)na^2}{bc^2+(c+a)na^2} = AG,$$

lunghezza del pendolo semplice isocrono all'aggregato del rettangolo LO, e del circolo IPDQI.

Corollario I.

Se essendo b, e c finite, fosse a = 0; si scoprirebbe $AG = \frac{2bc^3+2b^3c}{3bc^2} = \frac{2c^2+2b^2}{3c}$, formola, che si accorda con quella del Problema II., purchè si ponga in essa c in cambio di a.

Corollario II.

Che se stando a, e c dentro i limiti del finito, fosse b = 0, ne risulterebbe $AG = \frac{(c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2).na^2}{(c+a).na^2} = \frac{c^2+2ac+\frac{3}{2}a^2}{c+a}$, come nel Problema VIII., Corollario I.

Scolio.

Finora coerentemente alla Dissertazione I. ho considerato le oscillazioni, che si chiamano *in latus*

latus, ed ora passerò a dir qualche cosa delle vibrazioni *in planum*, la cui direzione è normale a quella delle vibrazioni *in latus*, per far vedere l'utilità delle due formole per determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono. La soluzione di alquanti Problemi metterà la cosa in chiarissimo lume.

Problema XI.

Trovare la lunghezza del pendolo semplice isocrono al rettangolo LO (fig. 22.), che si vibra *in planum* intorno allo asse LM.

Ritenuta la preparazione, e le denominazioni del Problema II. Scolio II., osservo che tutti gli elementi $EAb = dy\,dz$ del rettangoletto $Pq = 2b\,dz$ distano egualmente dallo asse LM per la linea $AH = z$. Avremo dunque

$\frac{\int (AH)^2 \cdot Pq}{\int AH \cdot Pq} = AG$, ossia analiticamente

$\frac{\int z^2 \cdot 2b\,dz}{\int z \cdot 2b\,dz} = \frac{\frac{1}{3}z^3}{\frac{1}{2}z^2} = \frac{2}{3}z = AG$, e quando $z = a$,

$AG = \frac{2}{3}a$, come nel Problema I.

Corollario

In riguardo alle vibrazioni *in planum* egli è lo stesso come se tutta la superficie LO fosse ristretta nella linea AD.

Problema XII.

Determinare la lunghezza del pendolo semplice isocrono alle due verghe (fig. 31.) AD, AE di minima pari grossezza, che formando l'angolo stabile DAE, si vibrano *in planum* intorno all'asse LAM normale alla retta AK, che taglia nel punto F la retta DE in due parti DF, FE, che stanno come AE : AD, e passa pel comune centro di gravità delle due verghe.

Siano $AD = a$, $AE = b$, $DF = c$, $FE = \frac{ac}{b}$, e tirate DI, EK parallele ad LM, pongo $DI = mc$, sarà

si abbia $EK = \frac{mac}{b}$, $IF = \frac{nac}{b}$, onde si abbia $KF = \frac{nac}{b}$. Stabilisco inoltre $AB = z$, $Bb = dz$, e condotte AC, bc parallele a $D.E$, l'analogia

$AD : AE :: AB : AC$
$a : b :: z : \frac{bz}{a}$ mi dà $AC = \frac{bz}{a}$, e, conseguentemente $Cc = \frac{bdz}{a}$. Abbiamo di più

$AD : DF :: AB : BH$
$a : c :: z : \frac{cz}{a}$; e quindi $BH = \frac{cz}{a}$, $HC = \frac{cz}{b}$; e delineate AN, CO parallele ad LM, egualmente scopriremo essere $AN = \frac{mcz}{a}$, $HN = \frac{ncz}{a}$, $CO = \frac{mcz}{b}$, $HO = \frac{ncz}{b}$.
La linea $AI = \sqrt{((AD)^2 - (DI)^2)} = \sqrt{(a^2 - m^2c^2)}$; e quindi col mezzo dell'analogia

$AD : AI :: AB : AN = PB$
$a : \sqrt{(a^2-m^2c^2)} :: z : \frac{z\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{a}$
si stabilisce $AN = PB = \frac{z\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{a}$. La linea $QC = AN + NH + HO = \frac{z\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{a} + \frac{ncz}{a} + \frac{ncz}{b}$, e la linea $AH = AN + NH = \frac{z\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{a} + \frac{ncz}{a}$.

Rispettivamente alla vibrazione *in planum* la formola (1.) prende il seguente aspetto

$$\frac{S((PB)^2.Bb + (QC)^2.Cc)}{S(Bb + Cc).AH} = AG \text{ lunghezza del pendolo}$$

semplice isocrono. Sostituiti dunque i valori analitici, avremo

$$\frac{S\left(\left(\frac{a^2-m^2c^2}{a^2}\right).z^2dz + \left(\frac{a^2-m^2c^2}{a^2} + \frac{(a+b).2nc\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{ab\ \ a} + \frac{(a+b)^2n^2c^2}{a^2b^2}\right).\frac{bz^2dz}{a}\right)}{S\left(\frac{\sqrt{(a^2-m^2c^2)}}{a} + \frac{nc}{a}\right)zdz + \frac{bzdz}{a}}$$

$= AG$. Questa formola si riduce così

$$\frac{S\left(a^2-m^2c^2+2nc\sqrt{(a^2-m^2c^2)} + \frac{(a+b)}{b}n^2c^2\right)z^2dz)}{S(\sqrt{(a^2-m^2c^2)}+nc).azdz} = AG,$$

e passando all'integrazione

$$\frac{\left(a^2-m^2c^2+2nc\sqrt{(a^2-m^2c^2)} + \frac{(a+b)}{b}n^2c^2\right)zz}{(\sqrt{(a^2-m^2c^2)}+nc).3a} = AG,$$

e quando $z = a$

$$\frac{2\left(a^2-m^2c^2+2nc\sqrt{(a^2-m^2c^2)} + \frac{(a+b)}{b}n^2c^2\right)}{3(\sqrt{(a^2-m^2c^2)}+nc)} = AG,$$

lunghezza

lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto DAE, che si vibra *in planum*.

Corollario I.

Posto che sia $a = b$, ne proviene $DI = mc = DF = c$, e perciò $m = 1$, $KF = \frac{nac}{b} = 0$, e perciò $n = 0$, e conseguentemente $AG = \frac{2}{3} \sqrt{(a^2 - c^2)}$, e nelli ipotesi di $c = 0$, $AG = \frac{2}{3} a$, come nel Problema I. Il perchè si è rettamente integrato senza aggiunta di costante.

Corollario II.

Supponendo che l'una all'altra verga si sovrapponga, avremo $DI = mc = 0$, $EK = \frac{mac}{b} = 0$; e quindi $m = 0$. Nella stessa ipotesi sarà $DF = c = IF = nc$, e per conseguenza $n = 1$. La sostituzione di questi valori di m, e di n determina $AG = \frac{2}{3} \cdot \left(a + c + \frac{ac^2}{b \cdot (a+c)} \right)$. Scopriremo inoltre $AI = \sqrt{(a^2 - m^2 c^2)} = a$, $IK = IF + FK = nc + \frac{nac}{b} = c + \frac{ac}{b}$, e perciò $AK = AI + IK = a + c + \frac{ac}{b} = AE = b$. Raccolgo da tal equazione $c = \frac{b^2 - ab}{a+b}$, e surrogata questa espressione in cambio di c, trovo $AG = \frac{2}{3} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \right)$.

Se fosse $a = b$, ne risulterebbe, come nel citato Problema I., $AG = \frac{2}{3} a$.

Scolio.

Dimostro presentemente che la formola (2.) può con grande eleganza servire alla soluzione del ~~presente~~ nostro Problema. Supposta $A\alpha = \frac{2}{3} AD$, $A\varepsilon = \frac{2}{3} AE$, ne provengono $AN = \frac{2}{3} AI$, $AO = \frac{2}{3} AK$. Provasi egualmente, che girandosi *in planum* la verga AD intorno alli asse LM, con cui formi l'angolo costante LAD, sarà ad essa isocrona la verga verticale AI. Ma $\frac{2}{3} AI = AN$ è la lunghezza del pendolo semplice isocrono

alla

alla verga AI, dunque tale sarà altresì la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga AD, che oscilla nel modo descritto. Similmente vibrandosi *in planum* la verga AE intorno all'asse LM, con cui forma l'angolo dato MAE, sarà ad essa isocrona la verga verticale AK. E poichè $\frac{2}{3}AK = AO$ è la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla verga ~~AE, che oscilla nella predetta maniera~~ AK; lo stesso pendolo AO sarà parimente isocrono alla verga AE, che oscilla nella predetta maniera. Si pongano in N, O due masse proporzionali ad $AD = a$, $AE = b$, ed accaderà che sia H il comune loro centro di gravità, e che sia $NH : HO :: b : a$, come sopra abbiam dimostrato. Per la qual cosa il pendolo composto dei due semplici AN, AO sarà isocrono alle due verghe AD, AE, che si girano intorno all'asse LM, con cui formano gli angoli costanti LAD, MAE, ed il pendolo semplice isocrono al composto dei due semplici AN, AO, sarà isocrono altresì al pendolo composto DAE.

Ora per la formula (2) $\frac{(AH)^2 + NH \cdot HO}{AH} = AG$ lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto NAO; dunque tale parimente è la lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto DAE. In cambio di AH, NH, HO si sostituiscano i loro valori determinati nella prima soluzione, supponendo $AB = z = \frac{2}{3}a$, onde abbiasi $AH = \frac{2}{3}(\sqrt{(a^2 - m^2c^2)} + nc)$, $NH = \frac{2}{3}nc$, $HO = \frac{2}{3}\frac{anc}{b}$, e fatti i necessarj computi, si scoprirà come nella prima soluzione $AG =$

2

$$\frac{2\left(a^2-m^2c^2+2nc\sqrt{(a^2-m^2c^2)}+\frac{(a+b)}{b}n^2c^2\right)}{3\left(\sqrt{(a^2-m^2c^2)}+nc\right)}$$

Problema XIII.

Trovare la lunghezza del pendolo semplice isocrono alla superficie (Fig. 32.) NLIMON chiusa dalla curva formata da due rami eguali ILN, IMO, e dalla retta NO, la qual superficie si vibra *in planum* intorno all'asse BAC.

Pongasi AI = c, ID = b, IH = z, Hh = dz, HL = HM = y, ed essendo l'elemento Lm = 2y dz dell'aja LIMHL equidistante dall'asse BAC, avremo per la formola (1)

$$\frac{S(AH)^2.Lm}{S\,AH.Lm} = \frac{S(c^2+2cz+z^2).2y\,dz}{S((c+z).2y\,dz)} = AG$$

lunghezza del pendolo semplice isocrono all'aja LIMHL, che oscilla *in planum* intorno all'asse BAC.

Basterà ch'io discenda ad un solo esempio. Sia la curva NLIMO una parabola conica, la cui equazione $\sqrt{(az)} = y$. Avremo pertanto

$$AG = \frac{S(c^2+2cz+z^2)\,2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz}{S(c+z)\,2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz} = \frac{S(c^2z^{\frac{1}{2}}dz+2cz^{\frac{3}{2}}dz+z^{\frac{5}{2}}dz)}{S(cz^{\frac{1}{2}}dz+z^{\frac{3}{2}}dz)} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}c^2z^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}cz^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}z^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{3}cz^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}z^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{1}{3}c^2+\frac{2}{5}cz+\frac{1}{7}z^2}{\frac{1}{3}c+\frac{1}{5}z},$$

e quando $z = b$,

$$AG = \frac{\frac{1}{3}c^2+\frac{2}{5}cb+\frac{1}{7}b^2}{\frac{1}{3}c+\frac{1}{5}b} = \frac{35c^2+42cb+15b^2}{35c+21b}$$

Corollario I.

L'ipotesi di ID = b minima ci dà AG = AI = c, e chiaramente dimostra essersi nell'integrare giustamente omessa l'addizione della costante.

Corollario II.

Posta AI = c = 0, ne proviene $AG = \frac{5}{7}b$.

Corollario III.

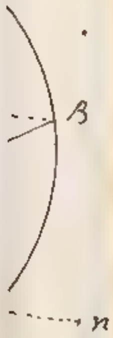
Se AI = c fosse negativa, cioè = IA', si

scoprirebbe

scoprirebbe $A'G = \frac{35c^2 - 42cb + 15b^2}{-35c + 21b}$, e quando $-35c + 21b = 0$, cioè $c = \frac{3}{5}b$, si troverebbe $A'G = \infty$. Ciò significa, che in tal ipotesi la nostra superficie non potrebbe vibrarsi intorno all'asse $B'A'C'$, perchè il suo centro di gravità caderebbe in A'; e quindi mediante la soluzione del presente Problema si è determinato il centro A' di gravità della superficie parabolica NLIMO distante dal vertice I per $IA' = \frac{3}{5} ID$.

Scolio.

Siccome ho supposto sottilissime verghe le linee, che oscillano; non altrimenti deve assegnarsi una minima costante grossezza alla superficie, di cui ho considerato le vibrazioni. Dalle superficie si potrebbe far transito ai corpi, ma io più non m'inoltro, bastandomi di aver dato un saggio dell'utilità della mia formola (2.) per determinare il Centro di Oscillazione.



B
n

… G

N

M
O

Dalla figura del Gorgo, che la Natura forma
in un vaso cilindrico ripieno di acqua,
nel centro del cui fondo sia aperto
un foro circolare.
Del Sig.r Co. Giordano Riccati

Trovasi questa Dissertazione nel Tomo III. delle
Memorie di Matematica, e Fisica della
Società Italiana presso
Dionigi Ramanzini.
1786
alla pagina 238.
Verona

Della figura del Gorgo, che la Natura forma in un vaso cilindrico ripieno di acqua, nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare.

I. Nell' Annotazione allo Schediasma XXXVI. del C. Iacopo Riccati mio Padre contenuto nel Tomo III. delle sue Opere ho determinato la figura del gorgo SMEFNT (fig. 1.), che si genera girando intorno all' asse 2G la curva SME, la cui equazione $y = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, nella quale le sezioni circolari MN = y, EF = c, ST = b, ed inoltre le linee IG = g, I2 = $\frac{gc^2}{b^2}$, IO = x Ho dedotta questa figura dalla supposizione, che la velocità dell' acqua nel gorgo si acceleri colla legge dei gravi cadenti per la linea del piombo. Chiamata u la velocità, colla quale l' acqua sgorga dal foro, ho dimostrato che la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo s' agguaglia a

$\left(\frac{2}{3}gc + \frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$

II. Sia HG = a l' altezza del vaso, HQ = s lo spazio minimo, per cui è discesa l' acqua, e per conseguenza l' acqua uscita dal vaso sia bs, la quale si è conformata in un cilindro cz, la cui base EF = c, e la lunghezza z = $\frac{bs}{c}$. Se nella citata Annotazione, che supposi minimo il foro EF = c, non avessi trascurato alcuna quantità relativamente nulla, ed avessi ridotto le formole alla misura conosciuta, sarei pervenuto alle due seguenti

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2 - sc^2}{b} + bs + \frac{2}{3}gc + \frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\right)}} = u,$$

$\therefore$ $\sqrt{(4\varepsilon acz)}$

Dalla figura del Gorgo.

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2}{b} - \frac{2c^3}{bz} + cz + \frac{2}{3}gc + \frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}} = u,$$

nelle quali ε significa lo spazio scorso in un minuto secondo da un grave, che liberamente discende. Dalla sovrascritta seconda formola si comprende, che se l'altezza $IG = g$ del gorgo nelli ipotesi del foro e minimo non è infinitamente minore di z, l'acqua ch'esce dal foro non giungerà mai ad acquistare la velocità $\sqrt{(4\varepsilon a)}$ propria di un grave disceso dalli altezza $HG = a$. L'esperienza ci insegna che l'altezza del gorgo è finita, ed oltre a ciò se fosse infinitesima, il moto delli acqua incontrerebbe una gran resistenza pel fregamento del fondo del vaso.

III. Bisogna dunque assegnare al gorgo una figura, da cui s'inferisca nelli ipotesi del foro minimo, che a z infinitamente picciola corrisponda $u = \sqrt{(4\varepsilon a)}$, quantunque g sia finita. Tagliata $Oo = dx$, e chiamata W la velocità confacente alla sezione $MN = y$, ne risulta la forza viva dello strato di acqua ydx uguale a $ydx \cdot \frac{W^2}{2}$. Ma stando le velocità u, W in ragione inversa delle sezioni $EF = c$, $MN = y$, ci si presenta l'analogia $y : c :: u : W$, da cui si deduce il valore di $W = \frac{cu}{y}$, che sostituito mi dà la predetta forza viva $= \frac{c^2 dx}{y} \cdot \frac{u^2}{2}$; e conseguentemente la forza viva della porzione $SMNT$ dell'acqua contenuta nel gorgo $= \frac{c^2u^2}{2} \int \frac{dx}{y}$. Noto che la velocità u si dee

considerarsi

considerava costante, cercandosi la forza viva dell'acqua nel gorgo, mentre alla sezione EF = c compete la velocità u. Avremo pertanto generalmente le due formole

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon a b s)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-sc^2+bs+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon a c z)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

Se supposto minimo il foro c, sia per esempio $z=c^{\frac{1}{2}}$, dovranno in riguardo a $cz=c^{\frac{3}{2}}$ trascurarsi i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}$, e quando anche $c^2\int\frac{dx}{y}$ sia infinitamente minore di $cz=c^{\frac{3}{2}}$, ne proverrà $u=\sqrt{(4\epsilon a)}$.

IV. Afferma l'Ab. Vincenzo Riccati mio fratello nella Lettera XIX. intorno ai Principj della Meccanica, che per mancanza di dati non ci è permesso di determinare la figura del gorgo. Or ecco il dato da me scoperto, col mezzo del quale stabilisco la mentovata figura. La gravità fa ogni sforzo, acciocchè l'acqua cz, che scaturisce dal foro, acquisti la massima velocità u. S'otterrà ciò, quando essendo date l'altre grandezze, sia minima $\int\frac{dx}{y}$. La Natura dunque prescieglierà quella figura di gorgo, rispettivamente a cui sia minima $\int\frac{dx}{y}$, e per conseguenza ancora tale $\frac{dx}{y}$, formandosi da infiniti elementi minimi un minimo tutto.

V. Fa di mestieri adunque il ricorrere al metodo delle Variazioni. Sia SME (fig. 2.) la curva, che girandosi intorno all'

all'asse ZG, generi la cercata figura del gorgo SMEFNT, e siano come sopra le sezioni circolari $ST = b$, $EF = c$, $MN = y$, e la linea $ZG = g$, $ZO = x$, $Oo = dx$. Le variazioni della curva SME vengano determinate dalla curva SIE, e la variazione della sezione $MN = y$ si agguaglierà alla zona circolare descritta coi raggi OM, Oi, la cui larghezza Mi. Dinotando le variazioni col segno δ, sarà la predetta variazione $= \delta y$. Segnata di più $Oo = dx$, da $ok = \delta dx$ venga espressa la sua variazione; ~~onde si abbia~~ La proprietà di minimo, che compete all'elemento $\frac{dx}{y}$, esige che sia nulla la sua variazione, onde si abbia $\frac{dx}{y} = \frac{dx + \delta dx}{y + \delta y}$. Ne segue per conseguenza, che debba avverarsi l'analogia $dx : \delta dx :: y : \delta y$, e che perciò ne risulti $y \delta dx = dx \delta y$. Ma si sa essere $\delta dx = d\delta x$; ~~$y d\delta x = dx dy$~~ dunque $y d\delta x = dx \delta y$. Di questa formola ne faremo uso in progresso al num.ro VII.

VI. Ripigliata per mano la formola $\frac{c^2 dx}{y}$, ne prendo le differenze espresse per δ indice delle variazioni, e mi si presenta $\frac{c^2 \delta dx}{y} - \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, e conseguentemente ancora $\int \frac{c^2 \delta dx}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ovvero $\int \frac{c^2 d\delta x}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ponendo in luogo di δdx la grandezza eguale $d\delta x$. Col metodo delle integrazioni per parti si trova $\int \frac{c^2 d\delta x}{y} = \frac{c^2 \delta x}{y} + \int \frac{c^2 dy \delta x}{y^2}$, e perciò l'equazione precedente si cangia così

Dalla figura del Gorge.

(A) $\int \frac{c^2 dy}{y^2}\cdot \delta x -$

$\int \frac{c^2 dx}{y^2}\cdot \delta y +$

$\frac{c^2}{y}\cdot \delta x = 0$

Da questa formola si caverà primieramente l'equazione indefinita

(B) $\frac{c^2 dy}{y^2}\cdot \delta x -$

$\frac{c^2 dx}{y^2}\cdot \delta y = 0$

ed indi la equazione determinata

(C) $\frac{c^2}{y}\cdot \delta x = 0$.

VII. Per liberarci frattanto nelle equazioni trovate dalle differenze indeterminate dx, δy, esamino se per la natura del Problema v'abbia fra loro qualche relazione. E primieramente per la formola (B) trovo $\frac{c^2 dy}{y^2}\delta x = + \frac{c^2 dx}{y^2}\delta y$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy\,\delta x = + dx\,\delta y$. Ma al fine del num.^ro^ V. ho scoperto $y\,d\delta x = dx\,\delta y$; dunque $dy\,\delta x = + y\,d\delta x$, e perciò $\frac{dy}{y} = + \frac{d\delta x}{\delta x}$, ed integrando $\log y = \log \frac{\delta x}{dx}$ ~~+ log. $\frac{dx}{\delta x}$~~, prendendo dx in qualità di costante. Quindi $y = \frac{\delta x}{dx}$, e finalmente $\delta x = y\,dx$. Si sostituisca queste valore nella formola $dy\,\delta x = + dx\,\delta y$, e si troverà $y\,dy\,dx = + dx\,\delta y$, e poscia $\delta y = y\,dy$. Per la qual cosa sono resi noti i valori delle due differenze indeterminate.

$$\delta x = y\frac{dx}{f}$$
$$\delta y = y\frac{dy}{f}$$

Scorgeremo a chiaro lume essere stati rettamente determinati i valori di δx; δy; se differenziando la formola $\delta x = y\frac{dx}{f}$, considerata costante dx, come si è fatto nella predetta determinazione, onde si abbia $d\delta x = +\frac{dx\,dy}{f}$, si sostituiscano i valori di $d\delta x$, e di δy nell'equazione $d\delta x - \frac{dx\,\delta y}{y} = 0$ scoperta al fine del num. V. effettuata la sostituzione, troveremo giustamente

$$d\delta x - \frac{dx\,\delta y}{y} = +\frac{dx\,dy}{f} - \frac{dx\,dy}{f} = 0.$$

VIII. Surrogati i valori di δx, δy nella formola (A), ci si affaccierà:

$$(A')\ \int \frac{c^2 dy}{y^2}\cdot y\frac{dx}{f} - \int \frac{c^2 dx}{y^2}\cdot y\frac{dy}{f} + \frac{c^2}{y}\cdot y\frac{dx}{f} = 0$$

Si faccia la riflessione che gli elementi delle due sommatorie sono eguali a due quantità identiche affette da segni contrarj, e che perciò l'aggregato delle due sommatorie esser dee $= 0$. E poichè la somma dei tre termini della formola (A') esser dee uguale a nulla; addiviene che sia il terzo termine $\frac{c^2 dx}{f} = 0$. Il perchè sarà nullo l'elemento della seconda sommatoria $\frac{c^2 dx}{y^2}\cdot y\frac{dy}{f} = 0\cdot + \frac{dy}{y}$, e per conseguenza anche quello della prima. +

+ Avverto in oltre, che dalla formola indeterminata (C) $\frac{c^2}{y}\cdot \delta x = c^2 dx = 0$ si raccoglie $x = \frac{k}{c^2}$. Ora x ha due valori costanti, cioè a dire $x = 0$ nel punto Z, $x = g$ nel punto G; e quindi si avrà $k = \begin{cases} c^2\cdot 0 \\ c^2\cdot g \end{cases}$ Ai due valori di $x = \begin{cases} 0 \\ g \end{cases}$ corrispondono altrettanti valori di $y = \begin{cases} b = ST \\ c = EF \end{cases}$

IX.

IX. Stabilisce il ch. Sig. Luigi da la Grange nel Tomo II. dell' Accademia di Turino, pag. 176. che se δx, δy sono assolutamente indipendenti l'una dall' altra, si pongono i coefficienti di ciascuna di esse uguali a zero. Benchè non si avveri questa indipendenza nel nostro caso, ci è nulladimeno permesso di supporre nella formola (B), che siano $\frac{c^2\delta x}{y^2}=0$, $\frac{c^2\delta y}{y^2}=0$, ma non già congiuntamente, onde quando $\frac{c^2\delta x}{y^2}=0$, sia parimente $\frac{c^2\delta y}{y^2}=0$, e al contrario.

Vediamo cosa succederebbe ammettendo, che $\frac{c^2\delta x}{y^2}$, $\frac{c^2\delta y}{y^2}$ si riferiscano in proporzione finita. Se $+\frac{c^2\delta x}{y^2}=0$, sarà parimente $+\frac{Fc^2\delta x}{y^2}=0$, e perciò secondo la premessa supposizione $\frac{c^2\delta y}{y^2} = +\frac{Fc^2\delta x}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $\delta y = +F\delta x$, ed integrando, $y = Fx + H$. Si rifletta, che quando $x = ZG = g$ è $y = EF = c$. Il perchè $c = Fg + H$, e quindi $H = c - Fg$. Fatto uso di questo valore, si scoprirà $y = Fx + c - Fg$, e poichè quando $x = 0$, esser dee $y = ST = b$, ne risulta $b = c - Fg$ e conseguentemente $\frac{b-c}{g} = -F$. Troveremo dunque finalmente $\left(\frac{b-c}{g}\right)\cdot(g-x)+c = y$, ossia $\left(\frac{b-c}{g}\right)\cdot\left(g-x+\frac{gc}{b-c}\right) = \left(\frac{b-c}{g}\right)\cdot\left(\frac{bg}{b-c}-x\right) = y$, e posti $SZ = r$, $EG = q$, $MO = p$, onde siano $b = nr^2$, $c = nq^2$, $y = np^2$, ci si presenterà

$$\frac{(r^2-q^2)}{g}$$

Della figura del Gorgo.

$\left(\frac{r^2-q^2}{g^2}\right)\cdot\left(\frac{gr^2}{r^2-q^2}-x\right)=p^2$, equazione alla parabola conica, il cui parametro $=\frac{r^2-q^2}{g}$, che girata intorno all'asse ZG genera il gorgo.

X. Ripigliata la formola $\left(\frac{b-c}{g}\right)\cdot\left(\frac{bg}{b-c}-x\right)=y$, sostituisco nella formola $\frac{cu^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ dinotante la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo SMNT in cambio di y lo scoperto valore, e trovo

$$\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{\frac{bg}{b-c}-x}=\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{H}{\frac{bg}{b-c}-x}:$$

ma quando $x=ZO=0$, $\log.\frac{H}{\frac{bg}{b-c}-x}=0$; perché in tal caso è nulla la forza viva dello strato nella SMNT. Dunque supponendosi $h=0$, dovrà essere $H=\frac{bg}{b-c}$, e conseguentemente $\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c}-x}\right)$ sarà la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo SMNT. Ponendo $x=g=ZG$, avremo la forza viva del gorgo intero SMEFNT

$$=\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c}-g}\right)=\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{b}{c},$$

la qual dovrebbe esser minima nella supposizione che siano date le quantità b, c, g, u.

XI. Nelle due formole generali, che si leggono al num. III., si sostituisca in vece di $c^2\int\frac{dx}{y}$ il rinvenuto valore $\frac{gc^2}{b-c}\cdot\log.\frac{b}{c}$, e prenderanno esse il seguente

seguente aspetto

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-sc^2+bs+\frac{gc^2}{b-c}\log.\frac{b}{c}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+\frac{gc^2}{b-c}\log.\frac{b}{c}\right)}}=u.$$

Ho già osservato al num.^{ro} III. che supposto minimo il foro EF $= c$, e fatto $z = c^{\frac{1}{2}}$, svaniscono i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}$, ed ora fa di uopo provare, ch'è parimente trascurabile il termine $\frac{gc^2}{b-c}\cdot\log.\frac{b}{c}$. Per la natura della logistica il logaritmo di un numero infinito $=\frac{b}{c}$ è immensamente minore di esso numero. Ora io dimostro, che $\log.\frac{b}{c}$ è più picciolo infinitamente di $\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$. Si prendano fra 1, e $\frac{b}{c}$ tre medie continue proporzionali $\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{b^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}}$.

e se fosse $\log.\frac{b}{c}=\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, ai detti numeri dovrebbero adattarsi i logaritmi $\frac{1}{4}\cdot\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2}\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, e perciò il numero infinito $\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, ed il logaritmo corrispondente $\frac{1}{4}\cdot\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$ spetterebbero ad un infinito dello stesso grado, il che si oppone alla natura della logaritmica. Ma quantunque fosse $\log.\frac{b}{c}=\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, e $\frac{gc^2}{b-c}\cdot\log.\frac{b}{c}=\frac{gc^2}{b-c}\cdot\frac{b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}=\frac{gb^{\frac{1}{4}}\cdot c^{\frac{7}{4}}}{b-c}$, questo termine merita d'esser

$=c^{\frac{3}{2}}$

negletto a confronto di cz; dunque tanto più dovrà trasandarsi la quantità immensamente minore $\frac{gc^2}{b-c}\cdot\log.\frac{b}{c}$. Per la qual cosa quando l'acqua uscita dal foro avrà scorso uno spazio $z=c^{\frac{1}{2}}$ proporzionale al diametro del foro stesso, sarà essa

pervenuta

pervenuta alla velocità $u = \sqrt{(4\varepsilon a)}$, benchè sia finita l'altezza g del gorgo.

§XII. Se frattanto il foro $EF = c$ fosse infinitesimo, l'acqua non uscirebbe dal vaso. Fa di mestieri adunque al minimo matematico sostituire il minimo foro fisico, e si otterrà che l'acqua dopo avere scorso fuori dal buco il picciolo spazio z, abbia fatto acquisto di una velocità, che molto si accosterà a $\sqrt{(4\varepsilon a)}$. Sia per esempio $b = 3600$, $c = 1$, il che richiede, che i diametri di queste sezioni circolari si corrispondano in ragione di $60 : 1$. Sia inoltre $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$. Avremo l'iperbolico $\log. \frac{b}{c} = \log. 3600 = 8{,}18869$. Nella formola esprimente la velocità u per z, e per le costanti si può fisicamente negligere $-\frac{2c^3}{b^2}$, e supporre $b - c = b$. Sarà dunque sostituendo i valori stabiliti

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{40}{3600} \cdot 8{,}18869\right)}} = u, \text{ e perciò}$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot 60}{\sqrt{(3947{,}5476)}} = \sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{60{,}00}{62{,}83} = u,$$

e prossimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{21}{22} = u$. Il perchè nell'esempio proposto dopo che l'acqua uscita dal foro ha scorso lo spazio $z = 1$, la sua velocità cala soltanto la vigesima seconda parte da quella di un grave verticalmente disceso dall'altezza $a = 60$. Se avessi supposto minore l'altezza del gorgo ponendo $g = 20$, avrei trovato $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{60{,}00}{61{,}57} = u$, e prossimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{36}{37} = u$, dimodochè la velocità u

si approssimarebbe maggiormente a $\sqrt{(4\,\varepsilon\,a)}$.

XIII. Or ecco ciò che ho raccolto dalla mentovata supposizione, che $\frac{c^2 dx}{y^2}$, $\frac{c^2 dy}{y^2}$ ~~si aguagliano a due nulla della medesima quantità~~ si [riferiscano] corrispondano in proporzione finita. Ma per dir il vero la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo generato dalla porzione della parabola SME, che s'è girata intorno all'asse ZG, non è la minima. Mi serva di prova il cercare la forza viva dell'acqua, che riempie il gorgo prodotto dal girare la porzione di ellisse conica SME intorno all'asse ZG. Ritenute le sopra stabilite denominazioni, onde siano le sezioni circolari $ST = b = nv^2$, $EF = c = nq^2$, $MN = y = np^2$, e di più il semiasse $ZV = e$, l'altezza del gorgo $ZG = g$, l'assissa $ZO = x$, la sua flussione $Oo = dx$, osservo che per la natura dell'ellisse abbiamo $\frac{v^2}{e^2}\cdot(e^2 - x^2) = p^2 = \frac{y}{n}$, e quindi $\frac{nv^2}{e^2}\cdot(e^2 - x^2) = b\cdot\left(\frac{e^2 - x^2}{e^2}\right) = y$. Ma quando $y = c = EF$, è $ZG = x = g$; dunque $b\cdot\left(\frac{e^2 - g^2}{e^2}\right) = c$, e perciò $e^2 = \frac{bg^2}{b-c}$, $e = g\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$. Nella formola generale $\frac{c^2 u^2}{n}\int\frac{dx}{y}$ esprimente la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione SMNT del gorgo si collochi in cambio di y il rinvenuto valore, e ci si presenterà la detta forza viva $= \frac{e^2 c^2}{b}\cdot\frac{u^2}{n}\int\frac{dx}{e^2 - x^2} = \frac{ec^2}{2b}\cdot\frac{u^2}{n}\int\left(\frac{dx}{e+x} + \frac{dx}{e-x}\right) = \frac{ec^2}{2b}\cdot\log.\left(\frac{e+x}{e-x}\right)\cdot\frac{u^2}{n}$.

Non c'è bisogno di aggiunger costante; perché supponendosi $\log.1 = 0$, quando nel

sito

sito ST l'assissa, ZQ = x = o, ne risulta rettamente la forza viva $= \frac{a\,c^2}{2b} \cdot \log. 1 \cdot \frac{u^2}{2} = 0$. Sostituito nella nostra formola in luogo di a il suo valore $g \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$, scopriremo la mentovata forza viva $= \frac{g c^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{g \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} + x}{g \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} - x} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$,

e posta $x = ZG = g$, ne proverrà la forza viva di tutta l'acqua contenuta nel gorgo

$$= \frac{g c^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} + g}{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} - g} \right) \cdot \frac{u^2}{2} =$$

$$\frac{g c^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{(b-c)}}{\sqrt{b} - \sqrt{(b-c)}} \right) \cdot \frac{u^2}{2},$$ la qual formola vale per qualunque misura del foro c. Che se lo stesso sia minimo o matematicamente, o anche fisicamente in riguardo a b; sarà $\sqrt{(b-c)} = \sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}$, e la formola si modificherà nel modo seguente

$$\frac{g c^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}} \cdot \log. \left(\frac{2\sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}}{\frac{c}{2\sqrt{b}}} \right) \cdot \frac{u^2}{2} =$$

$$\frac{g c^2}{2b} \cdot \frac{2b}{2b-c} \cdot \log. \left(\frac{4b-c}{c} \right) \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{g c^2}{2b} \cdot \log \left(\frac{4b}{c} \right) \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Una tal forza viva è minore di quella $\frac{g c^2}{b} \cdot \log. \frac{b}{c}$ determinata al num.ro X.; imperciocchè se il foro c è infinitesimo, $\log. \left(\frac{4b}{c} \right) = \log. \left(\frac{b}{c} \right) + \log. 4$ si eguaglia a $\log. \left(\frac{b}{c} \right)$, e la forza viva dell'acqua nel gorgo ellittico è la metà di quella nel gorgo parabolico. Che se il foro è minimo fisicamente la prima forza viva sarà alquanto maggiore della metà della seconda.

XIV. Supposti come sopra al num.ro XII. $b = 3600$, $c = 1$, $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$, ed essendo $\log. \left(\frac{4b}{c} \right) = 9{,}57495$, si troverà

$\sqrt{(4\,e\,a)}$

$\frac{\surd(4\xi a)}{\surd(\frac{20}{3600}+1+\frac{20\cdot 9,57495}{3600})} = u$, e ridotte

il computo, $\surd(4\xi a)\cdot\frac{60}{61.777}=u$, o prossimamente $\surd(4\xi a)\cdot\frac{35}{36}=u$. Che se fosse $g=20$, ne risulterebbe

$\frac{\surd(4\xi a)}{\surd(\frac{40}{3600}+1+\frac{10\cdot 9,57495}{3600})}=u$, e fatte le

necessarie operazioni, $\surd(4\xi a)\cdot\frac{60}{61,12}=u$, o prossimamente $\surd(4\xi a)\cdot\frac{54}{55}=u$. Le scoperte velocità sono maggiori di quelle, che assegnati alle costanti gli stessi valori, abbiamo rinvenuto nella supposizione del gorgo parabolico; e per conseguenza col mezzo del gorgo ellittico si ottiene una più copiosa uscita di acqua dal vaso.

XV. Ella è agevole da farsi la riflessione, che quanto più sono grandi le sezioni MN = y, altrettanto cala la forza viva dell'acqua nel gorgo. Per restar convinti di una tal verità, basta il considerare la formola $c^2\cdot\int(\frac{dx}{y})\cdot\frac{u^2}{2}$. Ascenderebbero adequatamente al massimo le dette sezioni, se la curva SME accettasse l'equazione $\frac{r^\omega}{a^\omega}\cdot(a^\omega - x^\omega)=p^\omega$. Non tralascio di notare, che la formola $\frac{\surd(4\xi ab^2)}{\surd(ac+b^2)}=u$ determinata nel Problema I. della mentovata Annotazione, la quale dipende dalla supposizione, che sia trascurabile la forza viva dell'acqua nel gorgo, è quella appunto, che con somma approssimazione, e salva la legge di continuità conviene coll'equazione $\frac{r^\omega}{a^\omega}(a^\omega-x^\omega)=p^\omega$.

e

e vaglia il vero, sintantochè (fig. 2) $ZO = x$ cala da $ZV = a$ per una quantità finita,+ sarà sempre x^{∞} trascurabile rispettivamente ad a^{∞}, e perciò essendo $SZ = V = MO = p$, le due linee SC, SM coincideranno, e si potrà supporre, che il gorgo principj ad una distanza picciolissima dal punto G, e che conseguentemente sia trascurabile la forza viva dell'acqua, che lo riempie. Prescindendo adunque dalla resistenza, la sovrascritta formola si dee preferire; perchè paragonata coll'altre, ci dà più grande il valore della velocità u.

+ ed anche infinitesima dentro certi limiti, come vedremo, sarà sempre &c.

XVI. Sia come sopra al num.^{ro} XII. $a = 60$ $b = 3600$, $c = 1$, $z = 1$, e dopo che l'acqua uscita dal foro averà scorso lo spazio $z = 1$, sarà fornita della velocità $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{60}{\sqrt{3600}}$ = $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{120}{121} = u$, la qual è maggiore delle due $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{21}{22} = u$, $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{36}{37} = u$ dipendenti dalla figura parabolica del gorgo registrate al predetto num.^{ro} XII., e delle altrettante $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{35}{36} = u$, $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{54}{55} = u$ dipendenti dalla figura ellittica registrate al num.^{ro} XIV., che suppongono l'altezza del gorgo, quella posta in primo luogo $= 40$, e quella posta in secondo luogo $= 20$. Ma quando anche si fosse posto $g = 1$, si sarebbe provato $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{109}{110} = u$ in riguardo alla figura parabolica, e $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{113}{114} = u$ in riguardo alla figura ellittica; velocità tutte e due minori della $\sqrt{(4ea)} \cdot \frac{120}{121}$.

XVII. Vediamo presentemente come dall'equazione $\frac{V^{\infty}}{e^{\infty}} \cdot (a^{\infty} - x^{\infty}) = p^{\infty}$ si deduca analiticamente la formola $\frac{\sqrt{(4eab z)}}{\sqrt{(ac + bz)}} = u$, che suppone minimo il foro $EF = c$. Poichè

$\frac{V^{\infty}}{e^{\infty}}$

Dalla figura del Gorgo.

$\frac{r^\infty}{a^\infty}(a^\infty - x^\infty) = \rho^\infty$, sarà parimente $\frac{n r^2}{a^2}(a^\infty - x^\infty)^{\frac{2}{\infty}} = n\rho^2$; ma $n r^2 = b$, $n\rho^2 = y$; dunque $\frac{b}{a^2}\cdot(a^\infty - x^\infty)^{\frac{2}{\infty}} = y$. Sia (fig. 3.) $Z'V = k$ minima di tal misura relativamente all'infinito ∞, che la sezione circolare $S'T'$ s'adegui colla $ST = b$. Segno $OV = t$, ed essendo $ZV = a$, $ZO = x$, ne proviene $x = a - t$. Supponendosi t infinitesima, avremo $x^\infty = a^\infty - \infty a^{\infty-1}\cdot t$; e quindi $a^\infty - x^\infty = \infty a^{\infty-1}\cdot t$, e perciò $\frac{b}{a^2}\cdot\frac{\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot a^2\cdot t^{\frac{2}{\infty}}}{a^{\frac{2}{\infty}}} = \frac{b\cdot\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot t^{\frac{2}{\infty}}}{a^{\frac{2}{\infty}}} = y$. Sarà pertanto la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione $S'MNT'$ del gorgo =
$c^2\int\left(\frac{dx}{y}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = a^{\frac{2}{\infty}}c^2\int\left(\frac{-dt}{b\cdot\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot t^{\frac{2}{\infty}}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Passo all'integrazione, e trovo la detta forza viva =
$\frac{a^{\frac{2}{\infty}}c^2}{\infty^{\frac{2}{\infty}}b}\cdot\frac{\infty}{\infty-2}\cdot\left(k^{\frac{\infty-2}{\infty}} - t^{\frac{\infty-2}{\infty}}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{a^{\frac{2}{\infty}}c^2}{\infty^{\frac{2}{\infty}}b}\cdot(k-t)\cdot\frac{u^2}{2}$.

Ho aggiunta la costante k, acciocché si annulli la sommatoria, quando $OV = t = Z'V = k$. Nella formola $\frac{b\cdot\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot t^{\frac{2}{\infty}}}{a^{\frac{2}{\infty}}} = y$ si ponga $y = c$, e ne proverrà $t = \frac{a c^{\frac{\infty}{2}}}{\infty\cdot b^{\frac{\infty}{2}}} = GV$.

Sostituito questo valore, ci si presenterà la forza viva dell'acqua contenuta nella parte di gorgo $S'MEFNT' = \frac{a^{\frac{2}{\infty}}c^2}{\infty^{\frac{2}{\infty}}b}\cdot\left(k - \frac{a c^{\frac{\infty}{2}}}{\infty\cdot b^{\frac{\infty}{2}}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$
$= \left(\frac{a^{\frac{2}{\infty}}c^2 k}{\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot b} - \frac{a^{1+\frac{2}{\infty}}c^{\frac{\infty}{2}+2}}{\infty^{1+\frac{2}{\infty}}b^{\frac{\infty}{2}+1}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$. Ora quando $t = k$, $y = b$; dunque per la formola $\frac{b\cdot\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot t^{\frac{2}{\infty}}}{a^{\frac{2}{\infty}}} = y$ avremo $\frac{b\cdot\infty^{\frac{2}{\infty}}\cdot k^{\frac{2}{\infty}}}{a^{\frac{2}{\infty}}} = b$, e perciò $k = \frac{a}{\infty}$. Fatta la sostituzione, la detta forza viva riceverà la seguente espressione $\left(\frac{c^2 a^{1+\frac{2}{\infty}}}{\infty^{1+\frac{2}{\infty}}b} - \frac{c^{\frac{\infty}{2}+2}a^{1+\frac{2}{\infty}}}{\infty^{1+\frac{2}{\infty}}b^{\frac{\infty}{2}+1}}\right)\cdot\frac{u^2}{2}$.

Supponendosi il foro c minimo, la quantità trascendentemente infinitesima $\frac{-c^{\frac{\infty}{2}+2}a^{1+\frac{2}{\infty}}}{\infty^{1+\frac{2}{\infty}}b^{\frac{\infty}{2}+1}}$ è nulla in paragone di $\frac{c^2 a^{1+\frac{2}{\infty}}}{\infty^{1+\frac{2}{\infty}}b} = \frac{c^2 a}{\infty b}$; dunque la mentovata forza viva $= \left(\frac{c^2 a}{\infty b}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{c^2 k}{b}\cdot\frac{u^2}{2}$.

Si aggiunga la forza viva della parte $SS'T'T$

del

del gorgo, che si agguaglia ad $(e-k)\cdot\frac{c^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}$, o adequatamente a $(g-k)\cdot\frac{c^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}$, meritando di essere trascurata la $GV = \frac{ec^{\frac{3}{2}}}{n\cdot b^{\frac{3}{2}}}$, e ne risulterà la forza viva di tutto il gorgo SMEFNT uguale a $\left((g-k)\cdot\frac{c^2}{b}+\frac{c^2k}{b}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{gc^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}$.

Nella formola generale, che si legge al num. III. $\frac{\sqrt{(4\epsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2}{b}-\frac{gc^2}{b}-\frac{xc^3}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}} = u$ si sostituisca in cambio di $c^2\int\frac{dx}{y}$ lo scoperto valore $\frac{gc^2}{b}$, e ci si presenterà, trascurando il termine rispettivamente nullo $\frac{xc^3}{b^2}$, e fatte le convenienti riduzioni, $\frac{\sqrt{(4\epsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, ch'è quella stessa formola, che ho determinata nel Problema I. della più volte nominata Annotazione, supponendo minimo il foro c, e che si possa negligere la forza viva dell'acqua, dalla quale il gorgo è riempiuto.

XVIII. Ho detto al num. IX., che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ non possono congiuntamente uguagliarsi a nulla. In fatti stando $\frac{c^2dx}{y^2} : \frac{c^2dy}{y^2} :: dx : dy$, sia dy infinitamente minore di dx, può accadere, che o al contrario. Suppongasi $dy = 0$ rispettivamente a dx, e perchè $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$ &c. $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, avremo integrando $\frac{c^2}{y} = M$: ma quando $x = 0$, $y = b$; dunque $M = \frac{c^2}{b}$, e perciò sempre $y = b$, e $dy = 0$, qualunque sia il valore di x; dimodochè

la

la linea retta SC è il luogo, che serve al minimo valore di $c^2\int\frac{dx}{y}$. Lo stesso intanto ottiene adequatamente, come ha fatto vedere, l'ellissa di grado infinito $\frac{y^\infty}{e^\infty}(e^\infty - x^\infty) = p^\infty$,

In oltre $y = c$, quando $x = g$; dunque $M = \frac{c^2}{c} = c$, e per conseguenza $y = c$, qualunque sia il valore di x, e questa è la determinazione, che serve al massimo valore di $c^2\int\frac{dx}{y}$. Si conseguirebbe con somma approssimazione lo stesso, se la curva (fig. 1.) SME fosse tale, che supposta minima ZO = x, la sezione MN = y si adeguasse alla sezione EF = c. In tal caso per tutto lo spazio OG si potrebbe considerar costante il valore di y = c, e la forza viva dell'acqua nel gorgo adequatamente al massimo ascenderebbe.

XIX. La flussione $\frac{c^2dx}{y^2}$ dedotta anch'essa dalla formola indefinita (B) si può stabilire [illegible] infinitamente minore di $\frac{c^2dy}{y^2}$. Ciò posto si otterrebbe $c^2dx = 0$, e quindi integrando $c^2x = N$, e qualunque fosse la y, dovrebbe essere $x = \frac{N}{c^2}$, cioè uguale ad una costante. + [illegible]

* condotte Ea, Ff parallele a GZ

[illegible] c.

[illegible]

clusioni

la quale di più osserva la legge di continuità, e fa transito gradatamente dalla sezione y alla c.

+ Richiedono le condizioni del Problema, che x possa ricevere due valori costanti $x = 0$, $x = g$. Accettato il secondo, ad $x = g$ si riferirebbe qualunque valore di y fra i limiti b, c: ma per la formola $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$ a qualsivoglia grandezza di x fra il nulla, e g dee corrispondere $y = b$; dunque resta determinato il gorgo (fig. 3.) ECSZDF, in cui l'acqua è fornita della minima forza viva. Supposta $x = 0$, potrebbe y ricevere tutti i valori fra b, e c. E poiché per la formola $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$ esser dee sempre $y = c$, assegnato ad x qualunque valore fra il nulla, e g, ne proviene * il gorgo (fig. 1.) SaEFfT, la cui acqua è dotata della massima forza viva.

XX. Le due supposizioni di $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2dx}{y^2} = 0$ ci guidano alla conclusione, che sia nulla quell'altezza

~~clusioni relative alla minima forza viva dell' acqua nel gorgo, la prima, che non ci debba esser gorgo; la seconda, che l'altezza del gorgo sia nulla. Richiede la legge di conti=nuità, che un qualche gorgo ci sia.~~ Nel Problema I. della citata Annotazione ho sup=posto minima e trascurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo. Un effetto equivalente (fig. 3) nasce ammettendo per la curva S S'M E, che genera il gorgo, l'equazione $\frac{b}{a}(a^m - x^m)^{\frac{1}{m}} = y$, essendo trascurabile la differenza fra le forze vive dell' acqua S S'M E F N T'T, e dell' acqua S C D T. Se non si dovessero evitare i soverchj fregamenti, e le particole acquee fossero infinitesime, basterebbe un menomissimo spazio Z'G, nel quale si facesse transito dalla velocità conveniente alla sezione S'T' = ST adequatamente a quella, che compete alla sezione E F. Ma tentando la gravità dell' acqua di esercitare la massima azione, ed essendo questa tanto maggiore, quanto sono minori le resistenze, ed oltre a ciò essendo le particole acquee piccolissime sì ma finite, egli è ne=cessario, che lo spazio Z'G sia tale, che possa esser composto di innumerabili strati di acqua, la velocità dei quali vada gradatamente crescendo, e che di più la curva S'M E sia quanto basta distante dalle pareti, e dal fondo del vaso. Il perchè la Natura sceglierà per la figura del gorgo l'ellisse S M E di quel grado, che lascj un conveniente spazio S M E C S fra il gorgo, le pareti, ed il fondo del vaso, onde minorate le resistenze, eserciti la gravità dell' acqua la massima possibile azione.

XXI. Si conchiude pertanto, che il metodo delle Variazioni serve alla soluzione del

proposto

altezza, in cui gradata=mente si passa dalla ve=locità conveniente alla sezione b alla velocità, che compete alla sezione c. Succede ciò o nel sito (fig. 1.) CD, o nel sito (fig. 2.) ST, secondo che la forza viva dell' acqua nel gorgo è minima, o massima. Una tal altezza uguale a nulla non appartiene alla fisica, la quale può sol=tanto supporla minima sì ma finita.

proposto Problema col mezzo della formole $-\frac{c^2 dy}{y^2} = a;\ \frac{c^2 dx}{y^2} = 0$; prescindendo dalla resistenze, e supponendo infinitesima la particole acquee; dimodochè lo spazio piccolissimo ZG basti, salvata la legge di continuità, per passare dalla velocità spettante alla sezione S'T' all'altra, che appartiene alla sezione EF. Il valore costante $y = b$ mi dà la minima forza viva dell'acqua nel gorgo, ed il valore costante $y = c$ mi dà la massima. Ai mentovati minimo, e massimo ci possiamo accostare bensì, ma non giammai pervenirvi, a cagione di dover passar l'acqua dalla velocità propria della sezione S.T = b. a quella, che conviene alla sezione EF = c col mezzo di infiniti inassegnabili incrementi. Alla curva SS'ME generante il gorgo ~~[illegible]~~, la cui equazione $\frac{b}{a^2}\left(a^{\omega} - x^{\omega}\right)^{\frac{2}{\omega}} = y$, procura la Natura di accostarsi quanto le permettono le resistenze, e la grandezza menomissima delle particole acquee, dentro i limiti del finito.

XXII. Do compimento alla presente Memoria con una riflessione, che sembrami molto importante. Si può dubitare che sia una continuazione del gorgo la porzione di vena EFF'E' situata tra il foro EF, e la massima sua contrazione E'F'. In questa ipotesi la curva SME, che colla sua rivoluzione intorno all'asse ZG genera la figura del gorgo, non potrebbe esser un'ellisse: ma io l'ho dimostrata tale; dunque la curva EE' non è una continuazione dell'ellisse SME. Qual è dunque l'indole della curva EE'? Ristringendosi gli strati acquei procedendo da ST verso EF, l'acqua guadagna qualche velocità da M, e da

N

N verso O, la quale, non essendo sensibilmente costipabili le particole acquee, ben presto prende la direzione OG, onde le velocità degli strati ST, MN, EF per la detta direzione stieno in ragion inversa delle sezioni ST, MN, EF. Dalle velocità per le direzioni EG, FG nel sito EF, e dall'uscir l'acqua rarefatta dal foro EF, dipende il ristringimento della vena. Applicando al foro EF un cannone convergente, si suol far retto il lato EE'. Se le velocità delle particole E per le direzioni EG, GG' fossero costanti, sarebbe EE' una linea retta: ma annullandosi nel sito E'G' della massima contrazion della vena la velocità per E'G', e poco crescendo la velocità per GG', il lato EE' è una curva, che volge il convesso verso GG'. Sia giusta il Cav. Newton il diametro del foro EF = $\frac{25}{40}$ di dito, ed alla distanza GG' = $\frac{20}{40}$ corrisponderà il più ristretto diametro della vena E'F' = $\frac{21}{40}$. Le velocità dunque della particola E per le direzioni GG', EG starebbero come 20 : $\frac{25-21}{2}$ = 2, ovvero come 10 : 1, se la velocità per EG fosse equabile: ma poichè questa si agguaglia a nulla nel sito E'G'; la velocità per GG' a quella per EG si riferirà in minor proporzione di 10 : 1.

Si inferisca pertanto, che la curva EE' non è una continuazione dell'ellisse SME. Volge questa il concavo verso l'asse LG', e quella tutto al contrario il convesso, così richiedendo la velocità per la direzione EG, che si annienta nel sito E'G' della massima contrazion della vena.

Lettere due
al P. D. Giovenale Sacchi &c.
sopra i duetti
dell' Handel, e del Bononcini
nel Tomo XXXVI. pag. 172 di
Giornale di Modena
1787

Lettera del Co. Giordano Riccati
al Dottissimo Padre D. Giovenale
Sacchi Professore di Eloquenza
nel Collegio Imperiale di
Milano sopra i Duetti dello
Handel, e del Bononcini.

Lettera del Co. Giordano Riccati
al Dottissimo Padre D. Giovenale
Sacchi Professore di Eloquenza
nel Collegio Imperiale di
Milano.

Mi espone lo Stimatissimo P. D. Giovenale Sacchi ad un' assai difficile impresa, comandandomi di mettere al paragone i Duetti del Bononcini con quelli dell' Handel, e di arrischiare la mia opinione piuttosto a favor dell' un, che dell' altro. L' eccellenza dei Duetti d' ambi gli Autori, e la diversa maniera, con cui sono scritti, mi rendono via più dubbioso, e tengono il mio rispettoso giudicio in sospeso. Ho presa dunque deliberazione di notare i pregi, ed anche qualche difetto di essi Duetti, e lasciar poscia a V. R. la decisione, che avendo illustrata la Musica colle moltiplici, dotte, ed eleganti sue Opere, è veramente Giudice competente.

L' Handel conduce eccellentemente le sue musiche composizioni, e facendo uso di poche cose ben intrecciate, e trasportandole ai Tuoni subordinati al principale, serve congiuntamente all' unità, ed alla varietà. Ristrignendomi a parlar dei Duetti, fa egli entrare una Parte con un motivo adattato al sentimento delle parole, e mentre l' altra Parte replica il motivo alla Quinta, o alla Quarta, o all' Unisono, canta la prima Parte un nuovo motivo confacente anch' esso al sensetto, che pronuncia, e col maneggio di questi due motivi, ed opportunamente ancora dei loro membri, perviene al fine del

versetto

versetto con molto piacer dalli orecchio.

Mi serva di esempio il primo Duetto a Soprano, e Contralto. Principia questo con un grazioso motivo esprimente le parole Sono liete, fortunate, dolci, e grate, e segue poscia il Soprano ripetendo lo stesso motivo alla Quinta, mentre il Contralto applica alla parole le catene un secondo motivo, che sendo dipoi cantato dal Soprano, il Contralto gareggia con esso imitando ~~lo stesso~~ il motivo medesimo. Continua il versetto colli ~~usi continue~~ dai due motivi, e della loro parte ottimamente, e leggiadramente disposta. Essendo il Versetto scritto per D con Terza maggiore, passa il celebre Autore soltanto ai Tuoni simili subordinati C, A^{b}, ne modula ai Tuoni subordinati per Terza minore D, A, G. Non lascio di notare, che al fine del versetto usa li Handel la seguente serie di accordi $C^{\substack{10\\7b}}$, $C^{\substack{11\\6}}$, $C^{\substack{11\\5}}$, $C^{\substack{10\\5}}$, $C^{\substack{10\\4}}$, $C^{\substack{9\\7b}}$, $C^{\substack{8\\7b}}$, $C^{\substack{8\\6}}$, $C^{\substack{7b\\6}}$, $C^{\substack{7b\\5}}$, $C^{\substack{7\\5}}$, $D^{\substack{6b\\5}}$ &c. nel sesto termine della quale qualche rigido Maestro di Contrappunto non approverà quella Nona introdotta senza preparazione. +

Il secondo Duetto è composto nel Tuono C per Terza minore per le due voci Soprano, e Contralto. Riesce molto elegante il primo Versetto Troppo ~~dura~~ troppo fiera è la legge ~~dalli~~ amor. Il primo motivo espressivo della ~~sud~~detto parole sentimento

+ Una simile licenza si trova ancor nell Andante del Duetto secondo.

~~parole~~ sentimento ha l'estensione di undici Battute,
ed è cantato dal Soprano. Nella undeci-
ma Battuta entra il Contralto collo stesso
motivo trasportato una Quarta all'ingiù,
ed indi il Soprano introduce un secondo
motivo, che imita elegantemente alcune
porzioni del primo. La condotta di questo
Versetto è alquanto libera; imperciocchè
oltre i nominati motivi ne adopra degli
altri, discendendo in un luogo, e nell'
altro ascendendo per Semituoni, e dando
~~luogo~~ udire ad alcuni corti, e graziosi motivi mol-
to adattati alle parole troppo fiera, troppo
cruda. Modula l'Autore ai Tuoni subordi-
nati B, A simili al principale E, ed in-
oltre ai Tuoni per Terza maggiore G, D
parimente subordinati. Non usa la modu-
lazione al Tuono subordinato C per Terza
maggiore, la quale, come ho ~~notato~~ avvertito nel
Saggio sopra le Leggi del Contrappunto è
la meno perfetta. Ho notato in questo
Versetto il seguente passo
$B^{7}_{3\#}$ | C^{3} $C^{\#}$ | $B^{\#}$, che merita riflessione.
La Settima di B diviene Sesta di C, la quale
si dee considerar dissonante, e dovrebbe
risolversi in G. Per esentarla da tale ri-
soluzione il Handel la converte per un Semi-
tuono minore, e la fa divenir ~~settima~~ quarta $A^{\#}$
corda artificiale del Tuono E, la quale
avendo l'obbligo di ascendere in B, l'orec-
chio si appaga udendo effettuato il passo
$A^{\#}$ B. Fa di uopo dire, che il Handel non
conoscesse la Sesta superflua C-$A^{\#}$; im-
perciocchè se ne avesse avuto notizia,

non

non avrebbe posto nel Basso C# per far poi transito in B. La sesta corda artificiale C# è introdotta nel Tuono E per evitare la Seconda superflua C. D#, e quindi nel nostro caso ~~non deve usarsi~~ [dovendo], il sovra scritto passo si avrebbe da riformare così.

^ non essendoci la ragione di usarla,

$B^{7}_{3\#} \mid C^{6}_{3} \cdot C^{6\#}_{3} \mid B^{4\,5}_{6\,3\#}$

Distintamente bello è il terzo Duetto scritto per due Soprani nel Tuono A per Terza maggiore. Osservi V. R. come sono ben concertate le Parti, e come il rende gustoso la continuata vicenda di consonanze, e di dissonanze. Nel primo Versetto usa il celebre Autore la modulazione al Tuono E per Terza minore, che al principale non ha subordinazione.

Ma riuscirebbe troppo lungo, e tedioso l'esaminare tutti i Duetti, che universalmente son degni d'un tanto Maestro. Presentemente riescono alquanto secchetti quelli, nei quali fa velocemente camminare le Parti con melodia, che non si confanno al gusto moderno. L'armonia è sempre la stessa in qualunque età, ma la melodia cangia di moda, e le melodie, che ora riescono grate, diverranno ben presto antiche. Gli eccellenti e tanto famosi Concerti, e Sonate del Tartini sono andati in disuso, e vi ha chi chiama stile gotico il comporre a Soggetto.

Finirò di trattare dei Duetti dell'Handel, osservando i maneggi ch'egli usa

dalle

dalla dissonanza. La Settima specialmente minore, ch'è la più mite di tutte le dissonanze, e che merita questo nome riferendola all'accompagnamento di Terza e Quinta, l'adopra l'Autore in tutte le sue derivazioni di Terza, Quinta, e Sesta; di Terza, Quarta, e Sesta; di Seconda, Quarta, e Sesta, come qui sotto
$G^{\substack{7\\5\\3}}$, $B^{\substack{6\\5\\3}}$, $D^{\substack{6\\4\\3}}$, $F^{\substack{6\\4\\2}}$. Dell'accordo della Nona, e dei suoi derivati
$C^{\substack{9\\5\\3}}$, $E^{\substack{7\\6\\3}}$, $G^{\substack{6\\5\\4}}$, $D^{\substack{7\\4\\2}}$ trovo usati dall'Handel il primo, secondo, e terzo, ma non m'è caduto sotto degli occhi il quarto, ch'è la Nona rovesciata, e posta nel Basso. La Quarta o Undecima ci può comparire sotto i seguenti aspetti.
$C^{\substack{11\\5\\3}}$, $E^{\substack{9\\6\\3}}$, $G^{\substack{7\\6\\4}}$, $F^{\substack{7\\5\\2}}$. Ci somministrano i nostri Duetti l'Undecima fondamentale, la riferita all'accompagnamento di Terza, e Sesta, e la rovesciata. Non m'è riuscito di osservarla corrispondente alli accordi di Quarta, e Sesta. Resta da considerarsi l'ultima Dissonanza, cioè la Sesta, o Terzadecima, i cui maneggi a dire
$C^{\substack{13\\5\\3}}$, $E^{\substack{11\\6\\3}}$, $G^{\substack{9\\6\\4}}$, $A^{\substack{5\\3}}$.
Contengono i lodati Duetti la Terzadecima fondamentale, e quella che si riferisce all'accompagnamento di Terza, e Sesta, come nel sottoposto esempio $F^{\substack{5\\3}}$ $C^{\substack{6\\4\,3}}$. Gli altri due maneggi non sono caduti sotto la mia osservazione.

Trovo frequentemente posto in opera dall'Handel il seguente passo, di cui

si

si serve ancora il Corelli
G^{7}_{5} | A^{6}_{3} G^{6}_{4} 7^{6}_{5} | G^{6}_{4} G^{5}_{3} G^{3} | C^{8}.
La Sesta di A è dissonante, e vien preparata
dalla Settima di G, e si risolve nella
Sesta di G. Segue l'accordo 7^{6}_{5}, in cui
la Quinta C è radicalmente Settima, deri-
vando il nostro accordo dal fondamenta-
le $D^{7}_{5}_{3}$. Ora il suono C, ch'era conso-
nante nel precedente accompagnamento
G^{6}_{4}, diviene consonante altresì nel sus-
seguente G^{6}_{4} senza aver ricevuta risolu-
zione. Questa maniera di usare la dis-
sonanza in certi incontri fa buonissimo
effetto. È frequente nei Recitativi il
passo C^{5}_{3} $^{6}_{4}{}_{2}$ $^{4}_{3}$, in cui C base dell'
accordo di Terza e Quinta, diventa Un-
decima rovesciata, e poi torna ad essere
equisonanza come nel precedente accordo
C^{5}_{3}.

Notati i pregi, ed anche qualche neo
nei Duetti dello Handel, passo a fare lo
stesso ~~anche~~ in quelli del Bononcini.
Forma questo bravo Scrittore i suoi Duet-
ti con Versetti ad una, e a due voci, e
con Recitativi. Sono questi assai buoni;
ma le Arie a voce sola, quantunque scrit-
te con ottimo Contrappunto, e con melo-
dia a qual tempo aggradevoli, riescono
presentemente di gusto antico. Mi ri-
stringerò dunque soltanto a trattare
dei Versetti a due voci composti frequentemente a sog-
getto colla sua risposta, e imitazione, e
spesso ancora con controsoggetto.
Nel primo Duetto a Soprano e Basso

osservi Stimat.^mo^ P. D. Giovanni da il Varsulto, nel Tuono C per Terza minore che l'alma nel contento dopo lieve martir alfin si trova, ovvero che l'alma nel tormento dopo breve piacer alfin si trova. Il primo sentimento è cantato dal Soprano, il secondo dal Basso. Entra il Soprano col Soggetto corrispondente alle parole che l'alma nel contento, a cui risponde per imitazione il Basso che accompagna. Dopo ciò il Basso, che canta replica il Soggetto all'Ottava bassa, ed indi il Soprano fa sentire il Contrassoggetto relativo alle voci dopo lieve martir alfin si trova. A tale Contrassoggetto risponde il Basso all'Undecima grave, e poscia l'Autore col maneggio del Soggetto, del Contrassoggetto, e dalle loro risposte, e ponendo in opera la modulazione ai Tuoni al principale subordinati, ed a questo facendo ritorno, dà compimento al Versetto. Noti V. R. in più di un luogo usata la Nona rovesciata. Al D per esempio, con cui principia la nona Battuta, compete l'accompagnamento, D 3 4 proprio dalla mentovata dissonanza collocata nel Basso.

Sarebbe da desiderarsi che il Versetto Vedrà qual Nume indegno si ha più forza in un patto amore o sdegno, scritto nel Tuono minore G con Soggetto, e Contrassoggetto non uscisse troppo e verso i B molli, e verso i Diesis dai Tuoni al principale subordinati. Modula il Bononcini al Tuono minore F, al Tuono maggiore B♭, al Tuono minore C, al Tuono maggiore E♭

maggiore

maggiore A^6, al Tuono minore B^6,
e da questo poscia bruscamente ritorna
al Tuono G per Terza minore. Una
simile cruda modulazione si incontra
dal Tuono minore C al parimente
minore A, dal quale gradatamente si
fa strada al Tuono principale.

Gustosissimo è il principio del se-
condo Duetto Se bella son io a Soprano
e Basso nel Tuono minore G. Si
ammirano dei bellissimi attacchi, tal-
mente che a mio parere, è questo un
pezzo degno di un gran Maestro.
Meritano molta stima i Versetti Ma
in sì dolce catena, Per serbarti o mio
bene a Soggetto, e Controsoggetto, che
troppo lungo riuscirebbe il minuta-
mente considerare.

Il primo Versetto del Duetto O che
laccio è sommamente pregevole, e
mostra il gran fondo di Contrappunto,
che possedea il Bononcini. In più luo-
ghi dee usarsi l'accompagnamento con-
figurato A 4 derivato dal fondamentale
D $\frac{5}{4}$. Ponga ancor attenzione al princi-
pio della Battuta vigesimasesta, che con-
tiene l'accompagnamento C $\frac{5}{3}$, che ha
il cui fondamento C $\frac{9}{3}$ 6.

Terminerò di parlare dei bei Duetti del
nostro celebre Autore col fare alcuna
opportuna riflessione intorno all'ulti-
mo Versetto del Duetto quinto Il Nume
di Amore scritto per le due voci Soprano
e

e Contralto nel Tuono 7 per Terza maggiore.
I due Cantanti proferiscono gli opposti
sentimenti Che consola e diletta e l'alma,
e il core; Che lusinga ed inganna e l'
alma, e il core. Alle parole che lusinga
ed inganna è applicato un Soggetto canta-
to dal Contralto, in cui la Sesta dissonanza
esprime vivamente la lusinga dell'alma.
Risponde il Soprano all'Unisono, ma
ed in questo incontro la Sesta dissonan-
te si riferisce all'accordo di Terza e Sesta,
prendendo il seguente aspetto C $^{6\,7}_{4\,3}$.
Al rimanente del sentimento e l'alma,
e il core si adatta nel Soprano altro Sog-
getto, a cui risponde il Contralto una
Quarta all'ingiù. Alle stesse parole
accomoda l'Autore un altra proposta,
e risposta per imitazione, e colli alter-
nare i tre diversi Soggetti modulando
da Tuono a Tuono conduce al fine l'
elegante Versetto. In più luoghi collo-
ca nel Basso il primo Soggetto, che
ci mettono sotto gli occhi la Sesta dis-
sonante, e la Nona rivoltata nel
modo seguente A $^{6\,7}_{3}$ | A $^{5}_{3}$ G $^{6}_{4}$ G $^{6\,7}_{4}$ |
G $^{4}_{2}$ 7 $^{6\,5}_{3}$. In tale incontro A $^{5\,7}_{3}$ diventa
una Sesta rovesciata, cioè a dire
posta nel Basso; dimodochè A è il
suono dissonante prima preparato,
ed indi risolto. I tre numeri $^{4}_{2}$
indicano una Nona rivoltata.

Ho a disegno notato nell'Handel
e nel Bononcini l'uso della dissonanze
riferite

riferita al Basso fondamentale, alle parti di mezzo, e rivoltate, per far vedere, che non è mai stato interrotto dal secolo decimo-sesto sino al presente. Il Contrappunto doppio all'Ottava necessariamente il richiede, e quegli Autori, che adoperano esattamente un tal Contrappunto, hanno per conseguenza da valersi di tutti i maneggi delle dissonanze.

Da quanto ho scritto, Ill.mo Padre D. Giovenale, Ella per una parte comprende la stima grande che io faccio dei Duetti dello Handel, e del Bononcini, e per l'altra l'incertezza del mio giudicio, essendo composti con maniere diverse, ed entrambe eccellenti. Mi sembra per altro, che si possa da Lei sostenere che i Duetti del Bononcini non la cedono per lo meno a quelli dello Handel, e che gli uni, e gli altri possono gareggiare coi famosi Duetti di Monsig. Agostino Steffani.

Lettera II. del Co. Giordano Riccati al
Dottissimo Padre D. Giovenale Sacchi
Professore di Eloquenza nel Collegio
Imperiale di Milano.

Troppo gentilmente si esprime lo Stimo P. D. Giovenale affermando, che nel confronto da me fatto dei Duetti del Bononcini, e dello Handel rispetto all'artifizio del Contrappunto non sembra che sia possibile a dire alcuna cosa di più, o in miglior modo. Nella sua Lettera degli 15. Marzo, che troppo tardi mi giunse, V. R. più oltre bramava, che indicassi la ragione di ciò che anche da me si tocca nella Lettera I. dove parlando del Bononcini dico: La Arie a voce sola, quantunque scritte con ottimo Contrappunto, e con Melodie al qual tempo aggradevoli, riescono presentemente di gusto antico. Quale mai, ella soggiugne nell'ultima sua pregiatissima de' 23 Agosto, può essere la cagione di tal effetto? Certamente debb'essere intrinseca alla composizione; perchè quelle Arie, e le altre del medesimo tempo si riconoscono antiche da quelli stessi, che per l'addietro mai udite non le hanno. Per un simile sentimento noi anche distinguiamo lo stile di questo, e di quelli Autore, comecchè siano di un tempo medesimo. Or chi sarà quegli, che sappia salire alle cagioni di tal effetto, e possa distinguerle, e numerarle, e farle conoscere agli altri? I Maestri di Lettere non solamente ci dicono quale sia il carattere proprio di questo, e di quel Poeta, di quello, e di quell'Oratore, ma vanno anche ricercando i principj, donde nascano le differenze, e le dimostrano. Perchè altrettanto non hanno fatto mai, nè fanno i Maestri dell'Arte Musicale? E nondimeno questa sarebbe cosa utilissima agli studiosi, perchè potrebbero imitare con cognizione di causa, ed essendo bene istruiti, non errerebbero nella scelta degli esemplari. Io apprezzo le avvertenze, e il Contrappunto

quanto

quanto si dava apprezzare. Stimo nondimeno, che il fondamento principale d'una composizione sia la buona cantilena. Con tutto questo dal numero innumerabile di tanti, che hanno scritto intorno alla composizione Musicale, nessuno ch'io sappia ha preso a trattare di proposito della cantilena, ed a mostrarne i vizj e le virtù. Ben conosco, che una tale indagine era sommamente malagevole; e perciò in parte ne gli scuso. Egli era necessario per chi volesse accingersi a tale impresa, che fosse ad un tempo Oratore, Poeta, e Filosofo. Conveniva soprattutto, che fosse gran Metafisico, e grande Analista, cioè a dire accostumato a risolvere le cose ne' suoi componenti, a considerarne le combinazioni varie, e atto a pervenire col pensiero a quelle formole generali, che danno altrui la norma, e comprendono sotto di se tutti i casi analoghi; voglio dire tutti quelli, che sogliono insieme concorrere a produrre un dato effetto. In una parola Egli avrebbe dovuto sapere tutto ciò, che sa il Chiarissimo Sig. Co. Giordano. V.R. troppo benignamente mi suppone qual che non sono, e mi fa troppo onore animandomi ad una così difficile impresa. Mi accingo dunque ad obbedirla, ma pieno di giusto timore di non potervi riuscir degnamente.

Il metodo delle combinazioni non può condurci secondo il mio avviso al termine desiderato. La melodia dipende dall'armonia, e consiste nei passi, che si possono muovere dai suoni d'un armonico accompagnamento a quelli d'un altro. Il passaggio dal precedente accompagnamento contenente al susseguente

sussequente ci somministra nove movimenti melodici, dalla diversa perfezione dei quali ho ho trattato nel *Saggio sopra le leggi del Contrappunto*: essendo la cantilena formata da una serie di passi melodici, che suppone una serie di accompagnamenti armonici, e dandoci ogni coppia di accompagnamenti armonici di Terza e Quinta nove movimenti, fra i quali si può scegliere piuttosto l'uno che l'altro; egli è manifesto che procedendo per via di combinazione, entriamo per così dire in un oceano, che atterrisce l'intelletto, e molto più l'immaginazione. Si aggiunga, che spesso la cantilena tocca un dopo l'altro più suoni dello stesso accordo, il che accresce a dismisura il numero delle combinazioni, che diverrebbe ancora maggiore aggiungendo a parecchj accordi le dissonanze. Col metodo adunque delle combinazioni non si può trattare della cantilena. Per la qual cosa fa di uopo ristrignersi a prescrivere delle regole per la buona cantilena, che traendo l'origine da eleganti passaggi, da grate modulazioni da Tuono a Tuono, dalle migliori melodie, rechi piacere all'udito.

Nel mentovato Saggio dove parlo *della facoltà, che ha la Musica di imitare il senso delle parole, e di risvegliare nell'animo i varj affetti*, prescrivo le regole per i movimenti melodici o di Semituono minore, o di grado, e di salto all'insù, o all'ingiù; o gravi, o piccanti, che servono alla varia espressione, i quali quando ottengon l'intento, apportan molto diletto. Nell'Opera grande adduco gli esempj presi da varj Autori eccellenti. L'interrogazione per esempio ha dell'energia, e contiene qualche sospensione;

perchè

perchè attende la risposta. Il passo melodico A^{6}_{4} $B^{6\sharp}_{4}$; a cui corrisponde il Basso F^{8} $C^{5}_{3\sharp}$, movendosi di grado all'insù, ha dell'energico, e comparendo a B l'accordo di Quarta e Sesta maggiore, contiene della sospensione; perchè col detto accordo posto nel Basso non si chiuderà mai una cantilena, conoscendo troppo apertamente l'orecchio essere la Quarta una Quinta rivoltata priva del vero Basso. Col movimento adunque A^{6}_{4} $B^{6\sharp}_{4}$ si esprimerà vivamente il punto interrogativo.

Riporto qua un luogo del Saggio, che può molto giovare per spiegare, come V. R. desidera, quali siano i movimenti melodiosi atti alla maestà, quali alla grazia; perchè lo stile di alcuni ecceda in durezza, e quello d'altri in mollezza; quale sia l'effetto dei salti frequenti, e notabili, quale delle note, che procedono di grado in grado, o che replicano in quelle istesse; a quali effetti giovino le dissonanze, a quali le consonanze pure, e non interrotte, e altre cose simili; che appellare si possono i primi elementi della cantilena Musicale, e sono quasi i colori primigenii, che variamente composti, e temperati esprimono ogni cosa, e colla opportuna distribuzione fanno insieme colle parole tutto il giuoco, e quanto al dilettare, e quanto al muovere. A primo aspetto può sembrare, che un'Opera di tal natura dovrebbe esser infinita; ma io porto contraria opinione, e son certo, che nelle sue mani riuscirebbe assai breve. Ecco il luogo alla

pag. 120. In un modo principale si possono colla Musica esprimere gli interni movimenti dell'animo, procurando d'imitare coi suoni musicali quelle modificazioni

modificazioni, che i particolari affetti nella voce naturale introducono. Distinguonsi per me le passioni umane in veementi, ed in deboli. Chiamo veementi quelle passioni, che vanno accompagnate da una straordinaria agitazione degli spiriti animali, che supera la naturale. Di tal genere sono l'allegrezza, l'ardire, la temerità, la collera, il furore, la disperazione. L'altra specie di passioni, che nomino deboli, rende più del consueto languido, e meno attivo il moto degli spiriti animali. A questa seconda classe appartengono la mollezza, la pusillanimità, la mestizia, i languori, gli svenimenti. Si tiene di mezzo in fra due lo stato tranquillo dell'uomo, in cui gli spiriti hanno quel movimento, che al perfetto adempimento delle funzioni animali è più confacente.

Gli artifici, che insegno per muovere gli affetti veementi, o fiacchi, determinano uno stile vigoroso, o molle, il quale per conseguenza si ottiene mettendo in opera i mentovati artifici in quella dose che il vario grado dell'affetto ricerca. Alla maestà per esempio conviene uno stile grandioso misto di affabilità, il che si conseguirà mescolando insieme giudiziosamente gli artifici, che servono agli affetti forti, e deboli. Alla pagina 133, 134 addito i modi, che usa la Musica per isvegliare le dolci, le ingrate, o le miste affezioni, i quali producono lo stile o grazioso, o duro, o medio. Giova allo stile duro, che la cantilena abbondi di consonanze alterate, e di dissonanze. Acciocché lo stile riesca per così dir nerboruto, si introducano nella composizione e lunghe progressioni di movimenti di grado, e salti all'insù, e all'ingiù, i quali hanno da essere tanto

più

più numerosi, e più grandi, quanto lo stile si vuol più veemente. Con un opposto artifizio si potrà ammollir la composizione, schivando almeno la frequenza de' salti, e particolarmente de' grandi; ed altresì le lunghe serie di suoni di grado, che portino la voce o molto verso il grave, o molto verso l'acuto.

Fatta la considerazione, che le affezioni veementi alzano il Tuono ordinario della nostra voce, e le fiacche l'abbassano; si inferisca, che il solo trasferirsi dal grave all'acuto, o dall' acuto al grave, senza valersi di voci alterate, serve a dare una qualche veemenza, o mollezza allo stile. Ma siccome gli affetti gagliardi, e deboli alterano il Tuono ordinario della nostra voce; così per ottimamente imitarli si compiace molto la Musica di porre in opera delle voci alterate, e se l'alterazione è di accrescimento, serve agli affetti forti, e se di scemamento agli affetti fiacchi, aumentando nel primo caso il vigore dello stile, e nel secondo diminuendolo. Si dividono le alterazioni in due generi, l'uno de' quali comprende le voci modificate per un Semituono minore, che cadono sotto la considerazione ~~sue leggi~~ del Contrappunto, e soggiacciono alle sue leggi. Abbraccia l'altro genere le alterazioni, che dipendono dalli ineguale accordatura de' comuni Stromenti da tasto da me dimostrativamente determinata nel *Saggio*. Il *Miserere* del Sassone riuscirebbe assai meno patetico trasportandolo dal Tuono C al Tuono D per Terza minore. Abbia V. R. la tolleranza di rileggere la citata parte del Libro quarto del *Saggio*, che tratta della imitazione del senso delle parole, e del movimento degli affetti, e da essa raccoglierà tutto ciò, che può cagionare il vario carattere dello stile.

stile.

Mi rimane presentemente a dichiarare come si distingua lo stile di questo, e di quell'Autore, comecché sieno d'un tempo medesimo. Quando si sono udite più composizioni dello stesso Autore, abbiamo formata idea della melodia, e della modulazione, che usa con più frequenza, e per tal mezzo discerniamo il suo stile. Benché lo Stabat Mater del Pergolese sia divoto, patetico, e lagrimoso, e la Serva Padrona comica, graziosa, e scherzevole; nulladimeno lasciano trasparire lo stesso Autore. Lo stile del Tartini è pastoso, e cantabile. Non si scorda mai del primo motivo, ma trasportandolo da Tuono a Tuono, e interponendovi de' passi diversi, ma analoghi; serve del pari all'unità, ed alla varietà. Questa mutua corrispondenza di passi fa sì, che udito un Concerto, una Sonata da lui composti; facilmente l'Autore loro si riconosca. Prima di porsi a scrivere, soleva leggere l'Arie del Metastasio, la cui dolcezza eccitava la fantasia ad inventare dei leggiadri motivi. Il celebre P. M. Vallotti la secondava col tasteggiare il Tuono E^b per Terza maggiore. Si sperimenta questo Tuono assai patetico a cagione dei tre B molli B^b, E^b, A^b, fra i quali l'ultimo è molto calante. Ho fatto vedere nel Trattato di Contrappunto non ancor pubblicato, che nell'accordare il Cembalo si tiene proporzionatamente ugual conto della Quarta $E^b A^b$ 3 : 4, e della Settima minore $B^b A^b$ 4 : 7, e che di più in detto Tuono si sente molto giusto l'accordo di Terza maggiore, Quinta, Settima minore, e Nona. B^b D F A^b C.

espresso

espresso nella sua piena armonia dalla serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Le lodevoli qualità di tale Tuono vengono rese manifeste dall'uso frequente, che se ne fa nelle composizioni teatrali. Non tralascio di manifestarla, Stimo Sig. D. Giovenale, che se il mentovato eccellente Maestro Sambrunone una cantata più confacente al Teatro, che alla Chiesa; ne ammorzava il brio col mezzo dell'armonia; ed in fatti nel Teatro l'armonia suole piuttosto essere di rò così a spruzzo, che assiduamente. Chi non conosce le Arie dell'Jomelli, nelle quali non di rado si incontrano de' tratti originali? Nella Raccolta Ferrarese di Opuscoli si leggerà la spiegazione d'un passo enarmonico contenuto nella seconda parte dell'Aria Padre perdona o pena scritta dall'Autore predetto. Con questo passo, che fa un ottimo effetto, si modula dal Tuono G per Terza minore al Tuono simile subordinato 7# + proprietà singolarissima, che lo rende lecito, e lo distingue da tutti gli altri movimenti dello stesso Genere enarmonico, che si trasferiscono da un Tuono all'altro, i quali non sono legati da vicendevole subordinazione.

♭6 6♭
7#5 G♭3♭

+ del primo dei quali 7# è quarta corda artificiale, e del secondo G♭ seconda corda parimente artificiale,

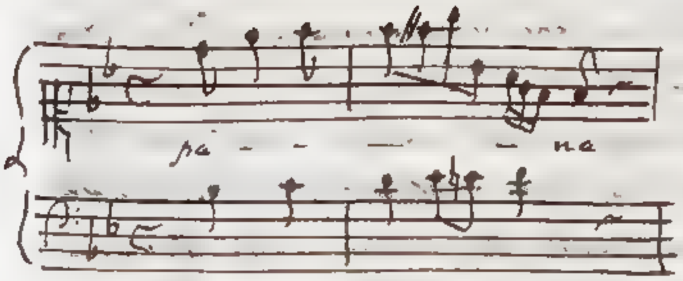
Rimane, ch'io accenni il perchè l'Arie a voce sola del tempo, in cui fioriva il Buononcini, si riconoscano antiche. E primieramente sì fatte Arie abbondano soverchiamente di Cadenze perfette, che esprimono il punto, e scarseggiano di quelle Cadenze secondarie, che equivalgono ai due punti, al punto e virgola, alla virgola, e formano lo stile periodico. Le troppo frequenti Cadenze perfette rendono

secca

secca la cantilena, che si assomiglia ad un' Orazione scritta ad incisi. In oltre non si usavano allora nè appoggiature, nè gruppetti, artificj che impastano una nota coll'altra in un modo analogo all'impasto dei colori nella Pittura, dal quale dipende il gusto del colorito. Il seguente passo potrebbe appartenere ad un' Aria antica

ma scritto colle appoggiature nel modo seguente, acquista gusto moderno

Giovano ancora moltissimo alle composizioni moderne il piano, il forte, i rinforzi coi loro gradi. Nei Duetti di Monsig. Steffani, e del Bononcini non ho mai veduto notati il piano, ed il forte. Gli Autori del tempo, di cui parliamo, non conoscevano l'accompagnamento, per esempio, di 6/5 di Terza di minore e Quinta minore fondato sulla quarta corda artificiale del Modo minore, e i suoi derivati, che posti in opera a tempo, e a luogo riescono gustosissimi. Non mi è riuscito in fatti di trovarli nei Duetti dei lodati Autori. Molto meno si incontra l'accordo 6/5 di Terza maggiore e Quinta minore coi suoi derivati, al quale serve di base la seconda corda del Modo per Terza minore, e che quantunque assai piccante somministra dei passi eleganti. Gli Autori mentovati non si servono neppure di certe note alterate, che ben usate, si sperimentano così saporite. Ecco un passo tratto dalla Cantata Tra voi taciti boschi della Signora Co. D. Teresa Agnesi, ch'io reco in esempio nel mio Trattato sopra le Leggi del Contrappunto.



La nota alterata 7♯ significa la veemenza delle pene, e la nota B♭ che apparisce calante in confronto di C quarta corda artificiale del Tuono maggiore B♭, e per la memoria ancor fresca di 7♯, serve a muovere la compassione. Si aggiunga, che ora tutto giorno si ascoltano moltissimi ornamenti leggiadri, che per l'addietro s'ignoravano totalmente.

Per altro io giudico, che ancora le cantilene soggiacciono alla moda. Prima le melodie del Cavalli, e poscia quelle del Tartini erano applauditissime, ed ora sono riputate antiche, benché assai più le prime delle seconde. Ogni anno segue qualche mutazione, e non ardirei di affermare, che sempre si migliori. Quell'uso nella medesima composizione di Tuoni troppo l'uno dall'altro rimoti certamente non può approvarsi, per esempio che l'Allegro di una Sinfonia sia in D, e l'Andante in B♭, Tuoni amendue per Terza maggiore. Mi sta ancor fisso nella memoria, che la Sinfonia del <u>Mondo della Luna</u> era stata scritta dal Buranello nel Tuono C per Terza maggiore, e che a questa seguiva il Coro nel Tuono D similmente per Terza maggiore. Un tale assurdo transito offendeva sommamente l'orecchio. La moderna Musica pecca nell'essere soverchiamente sminuzzata, e nulladimeno ai valenti Professori non può negarsi la lode di eseguire il difficile

facilmente

facilmente, e con somma puntualità, più che dà campo ai Maestri di sfogare la loro fertile fantasia.

~~Ho preveduto V. S., che la soluzione dei quesiti da Lei propostimi nella maniera in cui scriverei sarebbe stata buona alla vostra fantasia, che potesse sembrare troppo diligente, e scarsa; dalla quale avrebbe ritratto il gradimento del Chiar. P. Dr Giovenale, che possiede tanto eccellentemente la Musica.~~

Che la Musica moderna sia colpevole del mentovato difetto, il dimostra lo stile dei Duetti del Clari, dello Steffani, e degli altri Antichi fornito di un certo contegno, d'una certa modestia, e posatezza, che molto bene converrebbe agli affetti più, e devoti, e per così dire a' casti amori della Sacra Sposa dei Cantici, sebbene quei Duetti non contengano che amori profani. Meriterebbero molta lode i moderni Professori, che servono alla Chiesa, se facessero studio nuovamente di quelli esemplari eccellenti, che a gran torto sono stati dimenticati. La notata posatezza è una delle differenze notabili, e forse anche la più generale tra le antiche, e moderna cantilena. Confrontando la buona con la buona, a me sembra di vedere nella cantilena moderna maggiore varietà, ed ornamento, nelle antiche maggiore verità, e schiettezza; nella moderna un moto più celere, e più concitato, e nelle antiche un moto più tardo, e comodo, e per conseguenza una certa idea di tranquillità, di compostezza, e di riposo. Così le composizioni Sacre di quasi tutti i migliori tra i Moderni sentono il Teatro, e le profane degli Antichi in certo modo sentono la Chiesa. Anche forse l'origine di questa differenza

nasce

rinasce dalla qualità diversa della Poesia; perché gli antichi Autori di Madrigali scrivevano sopra le Poesie del Petrarca, e altre, che hanno molta placidità, e naturalezza. I Moderni si sono accostumati a Poesie, per dir così, più adattate alla Musica, tra le quali per altro anche le migliori hanno frequentemente un certo grado di calore soverchio, e di eccedente mollezza. La ricordata differenza tra lo stile antico, e il moderno non si doveva tralasciare.

Ha predetto V. R., che la trattazione dei quesiti da Lei propostimi nelle mie mani riuscirebbe assai breve. Non vorrei frattanto, che potesse sembrare troppo digiuna, e secca; della qual cosa ne rimetto il giudizio al Chiarissimo P. D. Giovenale, che possiede tanto eccellentemente la Musica.

Lettera

al Signor Giambattista Bortolani
professor di Cembalo, e di
Contrappunto.

impressa nel T. XIX pag. 172 della
Raccolta Ferrarese
Venezia
1787

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Al Sig. Giambatista Bortolani Professore di Cembalo, e di Contrappunto Giordano Riccati.

Nella seconda parte dell'Aria sommamente espressiva, e patetica Padre perdona; o pene dal valentissimo Sig. Niccolò Jomelli avete incontrato un passo, di cui non v'è riuscito di trovare la spiegazione nel mio Trattato inedito di Contrappunto. Alla ricerca che mi fate mi piacesse ch'io vi additi quella ragione, che avrebbe potuto renderne l'Autore; non posso non condiscendere; imperciocchè avendo Voi appreso da me il Contrappunto, ho sommo piacere, che in esso facciate sempre maggiore profitto. Avendo il Sig. Jomelli scritta l'Aria nel Tuono G con Terza minore, assegna alla seconda parte il Tuono E♭ con Terza maggiore. Or ecco il passo, di cui si tratta

A♭ $^{5}_{3}$ | A♭ $^{6}_{4\,2}$ A♭ $^{6}_{3}$ A♭ $^{4}_{3}$ | A♭ $^{4}_{2♮}$ A♭ $^{4}_{2♮}$ G $^{5}_{3♮}$ |
F♯ $^{7♭}_{5}$ F♯ $^{7♭}_{5}$ F♯ $^{7♭}_{5}$ | F♯ $^{7♮}_{5\,4♭}$ F♯ $^{7♮}_{4♭}$ F♯ $^{7♮}_{4♭}$ | F♮ $^{5}_{3♭}$ D $^{6♭}_{5♭\,3}$ D $^{6♭}_{5♭\,3}$ |
E♭ $^{5♭}_{3}$

fatto dal vostro eccellente Maestro il transito al Tuono C per Terza minore subordinato al Tuono maggiore E♭, al qual Tuono C appartengono gli accordi A♭ $^{4}_{2♮}$, G $^{5}_{3♮}$, F♯ $^{7♭}_{5}$, avete osservato succedere a quest'ultimo l'accompagnamento ignoto F♯ $^{7♮}_{5\,4♭}$, che a prima vista sembra ripugnante ad assurdo. Ma se riflettevate, che ne' Gravicembali serve lo stesso tasto ad F♯, e a G♭, vi accorgerete subito, che il passo si trasforma così A♭ $^{5}_{3}$ | A♭ $^{6}_{4\,2}$ A♭ $^{6\,5}_{3}$ A♭ $^{4}_{3}$ |
A♭ $^{4}_{2♮}$ A♭ $^{4}_{2♮}$ G $^{5}_{3♮}$ | F♯ $^{7♭}_{5}$ F♯ $^{7♭}_{5}$ F♯ $^{7♭}_{5}$ |
G♭ $^{6♮}_{4\,3♭}$ G♭ $^{6♮}_{3♭}$ G♭ $^{6♮}_{3♭}$ | F $^{5}_{3♭}$ D $^{6♭}_{5♭\,3}$ D $^{6♭}_{5♭\,3}$ | E♭ $^{5♭}_{3}$
Conviene l'accompagnamento G♭ $^{6♮}_{3♭}$ di Terza mag.re e Sesta superflua al Tuono

Tuono minore $B^{\flat}$, e deriva dal fondamentale $E^{\natural}\,{}^{5\flat}_{3\flat}$ di Terza diminuita, e Quinta minore, che ha per base la quarta corda artificiale del detto Tuono. Nel nostro caso per altro io sarei di opinione, che si debba attribuire al Tuono F per Terza ~~minore~~, di cui $G^{\flat}$ $E^{\natural}$ sono ~~ascendente~~ corde artificiali, ~~ed~~ seconda, e settima ~~corda artificiale~~. Niente, come la discorro. Il passo $F^{\sharp}\,{}^{3\flat}_{5}$ $G\,{}^{6\flat}_{3\flat}$ $F\,{}^{5}_{3\flat}$ è lecito, perchè aumentandosi $E^{\flat}$ Settima diminuita di $F^{\sharp}$ pel Semituono minore, e facendola diventar $E^{\natural}$ settima corda artificiale del Tuono minore F, che deve ascendere in F; la compiacenza, che prova l'orecchio nell'udir effettuato il movimento $E^{\natural}$ F, cancella in lui il desiderio della risoluzione $E^{\flat}$ D della Settima mentovata. Alla seconda corda naturale G del Tuono F per Terza minore si prende il Sig. Tomelli la licenza di sostituire l'artificiale $G^{\flat}$, unendo nello stesso accompagnamento $G^{\flat}\,{}^{6\flat}_{3\flat}$ le due corde artificiali seconda e settima, onde ei si presenti il passo $F^{\sharp}\,{}^{3\flat}_{5}$ $G^{\flat}\,{}^{6\flat}_{3\flat}$ $F\,{}^{5}_{3\flat}$, di cui mi avete ricercata la spiegazione. La sostituzione di $G^{\flat}$ a G rende più piccante l'accordo $G^{\flat}\,{}^{6\flat}_{3\flat}$ di Terza maggiore, e Sesta superflua, e richiede indispensabilmente che da $E^{\natural}$ si ascenda in F, onde tanto più svanisca la brama, che $E^{\flat}$ Settima diminuita di $F^{\sharp}$ discenda in D. Ho qualificato come licenza l'uso della seconda corda artificiale $G^{\flat}$ del Tuono minore F nell'accompagnamento $G^{\flat}\,{}^{6\flat}_{3\flat}$, avendo dimostrato nel _Saggio sopra le Leggi del Contrappunto_ pag. 31.,

che

che la seconda corda artifiziale calante dalla naturale per un Semituono minore si intro=duce soltanto nel Modo per Terza minore, ac=ciocchè la Cadenza dalla seconda alla quinta corda sia formata da due accompagnamenti consonanti di Terza maggiore e Quinta; non altrimenti che la Cadenza perfetta del Modo maggiore.

Al Tuono minore F compete la Cadenza $G\flat^{5\,6}_{3\,6}$ $C^{5\,4}_{3\natural}$; la quale per evitare il cattivo passo di melodia $G\flat$ C si suole usare così $A\flat^{6\flat 6}_{3\,6}$ $C^{5\,4}_{3\natural}$. Tuttavia il celebre P. M. Francescantonio Vallotti nel Libro I. della Scienza teorica, e pratica della moder=na Musica, Capo XXVII. Art. IV. pag. 68 stabilisce che la seconda corda artifiziale si possa usare nell'accompagnamento di Terza maggiore e Quinta minore fondato sulla quinta corda, del Modo minore, purchè nell'accompagnamento precedente sia contenuta la predetta seconda corda.

Quantunque io abbia impugnata questa opinione nelle Riflessioni sopra l'Opera mentovata pubblicate nel Tomo XXIII. del Giornale di Modena ~~pag~~, num.^ro^ III. pag. 77. nondimeno ~~tuttavia~~ avendo un così eccellente Maestro giudicato lecito nel Modo minore per esem=pio F l'accordo $C^{5\,6}_{3\natural}$, io non ho difficoltà di concedervi sanon ~~non~~ per regola, almen ~~ma~~ per licenza l'accordo $C\natural^{5\,6}_{3\,6}$, e per conseguenza anco=ra il derivato $G\flat^{6\flat 6}_{3\,6}$, tanto più, che nell' accompagnamento antecedente è contenuto il suono $F\sharp$ che nei Gravicembali è unisono al $G\flat$.

Osservate che nel passaggio $F\sharp^{3\,6}_{5}$ $G\flat^{6\flat 6}_{3\,6}$ l'antecedente accordo spetta al Tuono C, ed il conseguente al Tuono F. tutti e due per Terza minore, che sono mutuamente subordinati

\+ Dovrebbe crescere Gb sopra 7# per un elemento enarmonico 7# Gb, ch'è la differenza fra il Semituono minore 7 7#, ed il maggiore 7 Gb. Col passo &c.

^ a cui compete il nome di Seconda diminuita,

subordinati, e che hanno la dovuta subordinazione al Tuono Cb per Terza maggiore + Col passo enarmonico adunque 7#3. Gb 36/4 si fa transito da Tuono a Tuono subordinato; e quindi abbiamo in^ esempio di un uso lecito del Sistema enarmonico, il quale credo che sia singolare, e che al Sig. Jomelli si debba la lode di averlo scoperto e messo in pratica magistralmente. Per la qual cosa la nostra ricerca non solo è riuscita utile, perchè mi ha somministrata l'occasione di spiegare il passo dell'Aria del Sig. Jomelli, ma ancora per far vedere che il Genere Enarmonico non merita un'esclusione assoluta dal Contrappunto. Gli antichi Greci hanno conosciuto, ed usato un tal Genere, che poscia è stato messo in non cale per la sua soverchia difficoltà. I Moderni Giudicano i Moderni concordemente non adattabile l'Enarmonico alla nostra Musica, e qualche uso sforzato, che talvolta se ne incontra, è manifestamente contrario alle leggi del Contrappunto; perchè contiene un'illecita modulazione da Tuono a Tuono, che non sono legati da vicendevole subordinazione. Il Sig. Jomelli ha evitato questo scoglio, ed ha saputo congiugnere l'Enarmonico colla retta modulazione da Tuono a Tuono mutuamente subordinati.

Problema

Determinare il massimo allungamento
che il peso d'un pendolo
produce nella corda, a
cui è attaccato.

stampato nel Tomo IV. delle Memorie
di Matematica, e Fisica della
Società Italiana
pag. 81
Verona

NB. questo forma lo Schediasma XIII.
ed ultimo dell'Opera delle
Corde, ovvero Fibre Elastiche.

Problema.

Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato.

Del Signor Conte Giordano Riccati.

1. Questo problema è stato da me sciolto quando tentai la costruzione della curva descritta dalla ghianda di un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda. Ecco la strada da me inutilmente battuta. Il pendolo CA (Fig. 2.) sia collocato in sito orizzontale: si dimanda qual curva ADA descriverà il punto A, mettendo a computo la distensione del filo, o corda CA. Sia giunto il pendolo nel sito CD, e poscia mova un minimo passo sino in CF. Col raggio CD descritto l'archetto DG, conduco pel punto D la perpendicolare EDH, e segno DH eguale al peso finito, o massa del volume infinitesimo A, e pel punto H la linea HI normale a CD prodotta. Finalmente pel punto F tiro la perpendicolare FK, e pel punto D l'orizzontale DL.

Pongo $CA = L$, $CD = L+l$, $ED = y$, $CE = x = \sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}$, $AD = s$, $GD = dz$, e si averà per conseguenza $GF = dl$, $LF = dy$, $EK = -dx = \frac{(\overline{L+l}.\,dl - y\,dy)}{\sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}}$, $DF = ds$; $dz = \sqrt{(ds^2 - dl^2)}$. Sia in oltre M la massa, o peso del corpo A, u la sua velocità per la direzione DG, ∧ ed v la velocità assoluta per l'archetto DF della curva.

∧ v la velocità per la direzione GF,

II. Eguagliandosi ad u^2 il quadrato della velocità in D per la direzione DG, avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$. Il peso, o forza DH si risolve nelle due, IH che stimola il corpo per la direzione DG, e DI che lo stimola per la direzione CI. La seguente analogia determinerà il valore della forza DI. $CD : DE :: DH : DI$

$L+l : y :: M : \frac{My}{L+l}$

Si inferisca, che il corpo A è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$. Da tale forza egli è d'uopo sottrar quella, con cui la corda resiste all'allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. della mia Opera Delle corde, ovvero fibre elastiche pareggia $\frac{1}{2}h.\left(\frac{L+l}{L}\right)-\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, dinotando h la rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno, cioè a dire d'essa corda situata nella positura orizzontale CB. Sarà dunque la forza residua $=\frac{Mu^2+My}{L+l}-\frac{1}{2}h.\left(\frac{L+l}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, la quale ~~può~~ deesi supporsi, che agisca per lo spazio $GT=dl$. Ho detto ~~può~~ deesi supporsi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è atta ad esercitar vera azione, che alteri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG, GT, senza punto mutare dal suo canto la velocità assoluta per l'arco DT della curva, alla qual condizione dee il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la vera Origine, e Natura della Forza centrifuga contenuta nella Raccolta di Lucca del 1767.

Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione CD $=$

$$\frac{2}{M}\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}-\frac{1}{2}h.\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}\right)=v^2.$$

Il quadrato u^2 della velocità per la direzione DG ha da stare al già scoperto per la direzione CD, ossia GT come $(DG)^2=dz^2:(GT)^2=dl^2$. Avremo dunque $u^2=$

$$\frac{2}{M}\cdot\frac{dz^2}{dl^2}\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}-\frac{1}{2}h\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}\right),$$

e quindi la somma dei quadrati delle velocità per le dette direzioni, essendo $dz^2+dl^2=ds^2$), $=$

$$\frac{2}{M}\cdot\frac{ds^2}{dl^2}\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l}-\frac{1}{2}h\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}\right).\ (1.).$$

III. Non esercitandosi altra vera azione, che la positiva della gravità del corpo A, la quale si è applicata allo spazio $CD=y$, e la negativa

della

dalla tensione della corda CD, che ha ripartito i suoi contrasti per gli spazietti ∂l, si avrà
$My - \int\left(\frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{L\partial l + l\partial l}{L}\right) - \frac{1}{2}\frac{hL\partial l}{L+l}\right) = \frac{MV^2}{2}$, o sia effettuando la indicata integrazione
$My - \frac{1}{2}h\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL\cdot\log.(L+l) = \frac{MV^2}{2}$ (2.). I logaritmi si debbono prendere nella logistica della suttangente = 1, riferita al protonumero CA = L. Non ho aggiunta costante; perchè senza tale addizione, nella posizione CA del pendolo, in riguardo a cui $y = 0$, $l = 0$, si trova veramente $V = 0$. Ora il quadrato della velocità per D7 pareggia i due quadrati della velocità per DG, G7; dunque per la formula (2.) e (1.), moltiplicando questa per $\frac{M}{2}$,
$My - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL\cdot\log.(L+l) =$
$\frac{\partial s^2}{\partial l^2}\int\left(\frac{Mu^2\partial l + My\partial l}{L+l}\right) - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{L\partial l + l\partial l}{L}\right) + \frac{1}{2}\frac{hL\partial l}{L+l}\Big)$, e moltiplicando per ∂l^2, e presa la differenza, supposto ∂s costante
$\left(M\partial y - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{L\partial l + l\partial l}{L}\right) + \frac{1}{2}\frac{hL\partial l}{L+l}\right)\cdot\partial l^2 +$
$\left(My - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL\cdot\log.(L+l)\right)\cdot 2\partial l\partial\partial l =$
$\left(\frac{Mu^2\partial l + My\partial l}{L+l} - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{L\partial l + l\partial l}{L}\right) + \frac{1}{2}\frac{hL\partial l}{L+l}\right)\cdot\partial s^2$.
Fatta la divisione per ∂l, questa equazione si riduce alla seguente, sostituendo ∂z^2 in cambio di $\partial s^2 - \partial l^2$
$M\partial y\partial l + \left(2My - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL\cdot\log.(L+l)\right)\cdot\partial\partial l$
$\left(-\frac{Mu^2 - My}{L+l}\right)\cdot\partial s^2 \left(+\frac{2hLl + hl^2}{2L^2 + 2Ll}\right)\cdot\partial z^2 = 0$ (3.)

Rifletta chi legge, che per la formula (2.)
$MV^2 = 2My - h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + hL\cdot\log.(L+l)$ deve riferirsi ad Mu^2 come $\partial s^2 : \partial z^2$, onde si abbia $Mu^2 = MV^2\cdot\frac{\partial z^2}{\partial s^2} = \left(2My - h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + hL\cdot\log.(L+l)\right)\cdot\frac{\partial z^2}{\partial s^2}$
Sostituito questo valore in cambio di Mu^2 nella formola (3), si trova $M\partial y\partial l + \left(2My - \frac{2hLl + hl^2}{2L} + hL\cdot\log.(L+l)\right)\cdot$
$\partial\partial l\left(-\frac{2My}{L+l} + h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L^2+2Ll}\right) - \frac{hL\cdot\log.(L+l)}{L+l}\right)\cdot\partial z^2 +$
$\left(\frac{My}{L+l} + \frac{2hLl + hl^2}{2L^2+2Ll}\right)\cdot\partial s^2 = 0$. (4.)

IV. Col mezzo della equazione $L + l = \sqrt{(x^2+y^2)}$
$\partial l = \frac{x\partial x + y\partial y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $\partial\partial l = \frac{\partial x^2 + x\partial\partial x + \partial y^2 + y\partial\partial y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$
$- x^2\partial x^2$

$2x\,ddx + y\,ddy + \frac{x^2dy^2 - 2xdx\,ydy + y^2dx^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{(x^2+y^2)}}$ — with the first part over $\sqrt{(x^2+y^2)}$ (margin note)

$-\frac{x^2dx^2 - 2xdx\,ydy - y^2dy^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$dz^2 = \frac{x^2dy^2 - 2xdx\,ydy + y^2dx^2}{x^2+y^2}$ la formola (4.) si trasformerà così. $M\cdot\left(\frac{xdx\,dy + ydy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) + \Big(2My - h\cdot\left(\frac{x^2+y^2-L^2}{2L}\right) + hL\cdot\log\sqrt{(x^2+y^2)}\Big)\cdot\left(\frac{~~dx^2~~ + x\,ddx ~~+ dy^2~~ + y\,ddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right.$ ~~[illegible]~~ $\Big)\Big($ ~~$\frac{2My}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$~~ $+ h\cdot\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L\sqrt{(x^2+y^2)}}$ ~~[illegible]~~ $\Big)\cdot\left(\frac{x^2dy^2 - 2xdx\,ydy + y^2dx^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{My\cdot(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ ~~[illegible]~~ $= 0$. Levata la comun divisione per $\sqrt{(x^2+y^2)}$, la formola dopo ~~lungo~~ breve calcolo prende il sottoscritto aspetto

~~[illegible]~~

~~$-h\left(\frac{x^2+y^2-L^2}{2L}\right)\cdot(dx^2 + x\,ddx + y\,ddy + dy^2)$~~

~~$+ hL\cdot\log\sqrt{(x^2+y^2)}\cdot(x\,ddx + y\,ddy) = 0$~~ (5.)

(margin:) $M(xdx\,dy - ydx^2) + \Big(2My - h\left(\frac{x^2+y^2-L^2}{2L}\right) + hL\cdot\log\sqrt{(x^2+y^2)}\Big)\cdot(x\,ddx + y\,ddy) + \Big(h\cdot\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\Big)\cdot\left(\frac{x^2dy^2 - 2xdx\,ydy + y^2dx^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ (5)

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno dei tre metodi insegnati dal dottissimo Signor Leonardo Eulero nel Tomo terzo dell'Accademia Petropolitana, non è nota la maniera di ridurla alla prima differenza; e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V. Ho nondimeno giudicato opportuno il pubblicare il metodo da me usato, acciocchè possa servire di regola nella soluzione di quei problemi, nei quali ha luogo la forza centrifuga. Nel numero III. ho già detto, che la sola vera azione, che si esercita, è $My - \frac{1}{2}h\cdot\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL\cdot\log(L+l)$, a cui deve uguagliarsi la forza viva $\frac{MV^2}{2}$ del corpo M. La velocità V del predetto corpo per la direzione D7 si concepisca risolta nelle due v per la direzione G7, u per la direzione DG. Nel numero II. ho determinata la forza per la direzione D1, ossia G7 derivata dal peso del corpo M uguale

ad

ad $\frac{My}{L+l}$. Si aggiunga la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ per la stessa direzione, e dalla somma $\frac{My+Mu^2}{L+l}$ si sottri la forza $\frac{1}{2}h.\left(\frac{L+l}{L}\right)-\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, colla quale per la medesima direzione la corda ripugna all'allungamento, e rimarrà la forza $\frac{My+Mu^2}{L+l}-\frac{1}{2}h.\left(\frac{L+l}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, a cui si dee attribuire l'azione $\frac{My\,dl+Mu^2dl}{L+l}-\frac{1}{2}h\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}$, quando si adempiva l'obbligazione di aggiustare le partite, derivando dall'azione della forza per la direzione D.G l'azione $\frac{Mu^2dl}{L+l}$, che non esiste in natura; perchè alla forza centrifuga non si può assegnar vera azione.

Poichè $CD = L+l : Ca = x :: DH = M : HI = \frac{Mx}{L+l}$, sarà $= \frac{Mx}{L+l}$ la forza derivata dal peso M, la quale spinga il corpo per la direzione DG, ed agisca per lo spazietto $DG = dz$, onde si abbia l'azione $\frac{Mx\,dz}{L+l}$. La resistenza della corda, che tira per la direzione DC della corda stessa, non può esercitare alcuna reazione per la direzione DG. Si farà la dovuta compensazione, se la forza viva del corpo M per la direzione DG si ponga $= \int\left(\frac{Mx.dz}{L+l}-\frac{Mu^2dl.dz}{(L+l).dz}\right)=\frac{Mu^2}{2}$. In tal guisa la somma delle azioni elementari per gli spazietti $G7 = dl$, $DG = dz$ si scoprirà =

$$\frac{My\,dl+Mu^2dl}{L+l}-\frac{1}{2}h\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}+\frac{Mx\,dz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}$$

$= \frac{My\,dl+Mx\,dz}{L+l}-\frac{1}{2}h\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}$, la quale si eguaglia alla vera azione, che in natura si esercita $= M dy-\frac{1}{2}h.\left(\frac{Ldl+ldl}{L}\right)+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}$. Ed in fatti $\frac{My\,dl+Mx\,dz}{L+l} = M dy$. Sostituiti in vece di dl, dz, $L+l$ i loro valori registrati nel numero IV, troveremo $My.\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\right)+Mx.\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\right) = \frac{Myx\,dx+My^2dy+Mx^2dy-Myx\,dx}{x^2+y^2} = M dy$, come si doveva dimostrare. Avremo pertanto una nuova espressione di $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mx\,dz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}\right)$, che ci somministra le sottoscritte conseguenze.

VI. Prescindendo dalla forza centrifuga esser

dovrebbe

darrebbe $\frac{Mv^2}{2} = \int\left(\frac{My\,dl}{L+l}\right) - \frac{1}{2}h.\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) +$ $\frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mx\,dz}{L+l}\right)$, e la loro somma $= \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2}h.\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$ avendo poco fa dimostrato $\frac{My\,dl}{L+l} + \frac{Mx\,dz}{L+l} = Mdy$, e perciò $\int\frac{My\,dl}{L+l} + \int\frac{Mx\,dz}{L+l} = My$. Computata la forza centrifuga, cresca la velocità v, e cala la u colla legge che sia $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} =$ $My - \frac{1}{2}h.\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$; dimodochè tanto si aumenti $\frac{Mv^2}{2}$, quanto scema $\frac{Mu^2}{2}$ per la $\int\frac{Mu^2\,dl}{L+l}$. Credo che quanto ho scritto sia sufficiente per mettere in chiaro lume la maniera, con cui deggionsi maneggiare quei problemi, nei quali c'entra la forza centrifuga.

VII. Se non si ottiene la costruzione della curva ADZA, ci è non pertanto permesso di scoprire il massimo allungamento della corda corrispondente alla positiva CA, quando le due linee QD = y, CD = $L+l$ coincidono, onde si abbia $y = L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} =$ $\frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{2hLl-hl^2}{2L.(L+l)}$. Qualora l'allungamento sia giunto al massimo, questa forza dee pareggiare il nulla, e per conseguenza $Mu^2 = \frac{2hLl+hl^2}{2L}$ $- My$: ma in tal caso $y = L+l = CA$; dunque Mu^2 $= \frac{2hLl+hl^2}{2L} - M.(L+l)$. La velocità u normale alla direzione della corda si agguaglia nella mentovata circostanza alla velocità assoluta V del corpo B, ed essendo generalmente $MV^2 = 2My - \frac{2hLl-hl^2}{2L}$ $+ hL.\log.(L+l)$, e nella ipotesi di $y = L+l$ $MV^2 =$ $2M.(L+l) - \frac{2hLl-hl^2}{2L} + hL.\log.(L+l)$, avremo $2M.(L+l) - \frac{2hLl-hl^2}{2L} + hL.\log.(L+l) = \frac{2hLl+hl^2}{2L}$ $- M.(L+l)$, e perciò $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL}$ (B.). Formo due equazioni $\log.(L+l) = p$ (3.); $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL} = q$ (4.), e quest'ultima si

riduce

riduca alla seguente $(L+l-\frac{3LM}{2h})^2 = L^2(1+\frac{gM^2}{4h^2}+q)$ (9.)

VIII. All'asse AI (Fig. 2.), col parametro L^2, delineo la parabola BDQA, in cui all'ascissa $AI = 1+\frac{gM^2}{4h^2}+q$ corrisponderà l'ordinata $IA = L+l-\frac{3LM}{2h}$. Continuata AI sino in C, dimodochè sia $CI = \frac{3LM}{2h}$, ne risulterà $CA = L+l$. Dal punto C si tiri CK parallela ad IA; e segnata $BZ = 1$, a cui si riferisca $ZD = L$, $ZG = \frac{gM^2}{4h^2}$, sarà GI, o sia $LC = q$.

Faccio $LH = ZD = L$, ed all'assintoto KC descrivo la logaritmica MHA della suttangente $BZ = 1$, che passi pel punto H, il cui protonumero $LH = L$. Essendo $LH < LQ$, la logaritmica taglierà la parabola in un punto A, per cui si conduca l'ordinata AC. Giusta l'equazione (7.) $\log.(L+l) = p$, avremo $LC = p$, $CA = L+l$; ma per l'equazione (4.) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL} = q$, $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A, $p = q$, e per conseguenza si avvera l'equazione (6.) $\log(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (Fig. 1.) il filo del pendolo CA, quando è giunto nel sito verticale CA.

IX. Se la rigidità naturale h della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente piccola, diverrà infinita la linea (Fig. 2.) $LG = \frac{3LM}{2h}$. Lo stesso valore adequatamente competerà anche all'ordinata GQ della parabola, la quale si uguaglia ad $L.\sqrt{(1+\frac{gM^2}{4h^2})} = \frac{3LM}{2h} + \frac{Lh}{3M} = \frac{3LM}{2h}$; e perciò $LQ = \frac{3LM}{h}$. Quindi il punto H disterà infinitamente dal punto Q, e la logistica MHA taglierà la parabola ADQA in un punto A immensamente lontano dal punto Q; di maniera che se LQ è infinita, tanto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Postochè fosse $h = 0$, il filo CA (Fig. 1.) non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo A discenderebbe per la

linea

linea del piombo BO, nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe mai giungere, se non per adequazione, nella positura CA. Che se suppongasi h infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA, ma dopo un allungamento infinito.

X. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità h. In tale circostanza diviene minima la linea $LG = \frac{3LM}{2h}$, ed immensamente ancora più picciola la linea $ZG = \frac{9M^2}{4h^2}$. Si adequano dunque le due ordinate ZD, GQ, ed altresì le due linee $LG = LH - GH$, $HQ = GQ - GH$; laonde il punto H è infinitamente prossimo al punto Q della parabola. S'inferisca, che ancora il punto A, in cui le due curve si intersecano, sarà vicinissimo al punto Q, e perciò $CA = L + l$ supererà infinitamente poco $LH = L$. Presa per mano la formola (6) $\log.(L+l) = \frac{2Ll + l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL}$, e fatta la riflessione essere nella presente supposizione $\log.(L+l) = \frac{l}{L}$, ed l^2 trascurabile rispettivamente ad l, troveremo $hl = 2hl - 3M.(L+l)$, e conseguentemente $\frac{3ML}{h-3M} = l$, o sia per adequazione $\frac{3LM}{h} = l$: ma $HQ = LG = \frac{3LM}{2h}$; dunque tirata HN parallela a AI, ne risulta $NA = l = 2HQ$.

Nello Schediasma I. della citata mia Opera ho fatto vedere quanto sia grande la rigidità naturale h nelle corde di metallo. La rigidità naturale corrispondente al peso di due libbre, che stirava una corda da me usata in alcune sperienze riferite nel numero XVIII. ascendeva a libbre 1184 $\frac{2}{13}$. Supponiamo, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel sito orizzontale CA (Fig. 1.) si agguagli a libbre 1201, e sia $M = \frac{1}{3}$; L = once 12 = linee 144, e facendo uso della formola $l = \frac{3ML}{h-3M}$ competente all'ipotesi di h

infinita

infinita, si troverà il massimo allungamento l $= \frac{144}{12001-1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ di linea.

XI. Volendo dedurre la misura della distensione l dalla formola (6.) $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M(L+l)}{hL}$, egli è di uopo ricorrere all'attenzione. Per servirsi dei logaritmi delle tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente = 1. $\log.(L+l)$ riferito al protonumero L si agguaglia a $\log.\left(\frac{L+l}{L}\right)$ riferito al protonumero = 1. Ora la logaritmica delle tavole ha il logaritmo del numero 10 = 1, e nella logaritmica della suttangente = 1 il logaritmo del predetto numero è = 2,302 5851. Rispettivamente al medesimo protonumero i logaritmi dello stesso numero stanno come quelli di un numero dato. Prendendo adunque $\log.\left(\frac{L+l}{L}\right)$ nelle tavole, si faccia $1 : 2,302\,5851 :: \log.\left(\frac{L+l}{L}\right) : 2,302\,5851 \cdot \log.\left(\frac{L+l}{L}\right)$, ed il quarto termine pareggerà nella logistica della suttangente = 1 $\log.\left(\frac{L+l}{L}\right)$ riferito al protonumero = 1, e conseguentemente $\log.(L+l)$ riferito al protonumero L. Quindi valendoci dei logaritmi delle tavole avremo $2,302\,5851 \log.\left(\frac{L+l}{L}\right) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL}$, formola, che si riduce alla seguente $L\sqrt{(2,302\,5851 . \log.\left(\frac{L+l}{L}\right)+1+\frac{9M^2}{4h^2})} + \frac{3ML}{2h} = L+l$ (10.)

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con fisica esattezza, o come negli esempj addotti, quando la rigidità h è assai grande, dalla formola $l = \frac{3ML}{h-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l = 144,12$, onde si abbia $\frac{L+l}{L} = \frac{14412}{14400} = \frac{1201}{1200}$, e $\log.\frac{1201}{1200} = 0,000\,3620$. Sostituiti nella formola (10.) in vece di $\log.\left(\frac{L+l}{L}\right)$, di L, di M, e di h gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarj calcoli 144,119 984 = $L+l$, valore adequatamente uguale al supposto, consistendo la differenza nella

minuzia

minuzia 0,000038. Qui non c'è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di $L+l$ sommamente prossimo al vero. Per altro il trovare $L+l$ minore del valore supposto significa, che il detto valore ipotetico è più grande del giusto.

XII. Se la prima positura CP (Fig. 3.) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM, CB orizzontali, e PA verticale, e ritenute l'altre denominazioni, si chiami $CP = L$, $CM = a$. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la rigidità naturale h. Giunto il pendolo in CD, sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$, a cui pel numero XV. dello Schediasma I. della nominata mia Opera farà contrasto la forza $(\frac{1}{2}h+\frac{aM}{L}).(\frac{L+l}{L})-\frac{1}{2}h.\frac{L}{L+l}$. Avremo dunque la forza residua $=(\frac{Mu^2+My}{L+l}(-\frac{1}{2}h-\frac{aM}{L}).(\frac{L+l}{L})$ $+\frac{1}{2}h.\frac{L}{L+l}$ (11.).

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $\frac{MV^2}{2}=My-Ma=$
$S((\frac{1}{2}h+\frac{aM}{L}).(\frac{Ldl+ldl}{L})-\frac{1}{2}h.\frac{Ldl}{L+l})=My-Ma$
$(-\frac{1}{2}h-\frac{aM}{L}).(\frac{2Ll+l^2}{2L})+\frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $=1$, riferita al protonumero $CD=L$. Ora nel punto A $u=V$, $y=L+l$, e la forza allungante la corda esser dee $=0$; dunque sostituendo nella formola (11.) in luogo di $u^2=V^2$, e di y i loro valori, scopriremo

$$\frac{2M.(L+l)-2Ma-(h+\frac{2aM}{L}).(\frac{2Ll+l^2}{2L})+hL.\log.(L+l)}{L+l}$$

$+M-(\frac{1}{2}h+\frac{aM}{L}).(\frac{L+l}{L})+\frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}=0$ (12.), la qual formola si riduce alla seguente

$$\sqrt{\left(\frac{hL^3.\log(L+l)+hL^3-aML^2}{hL+2aM}+\frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{(hL+2aM)^2}\right)}+\frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM}=$$

$L+l$ (13.) e volendo far uso dei logaritmi delle tavole

$$\sqrt{\left(\frac{2,3025851\,hL^3.\log.\frac{L+l}{L}+hL^3-aML^2}{hL+2aM}+\frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{(hL+2aM)^2}\right)}$$

$+\frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM}=L+l$ (14.). Col mezzo di questa

equazione

equazione si troverà la massima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo dell' attenuazione.

XIII. La formola (12.) si può costruire collo stesso artificio usato rispettivamente alla formola (6ª.). La mentovata formola (12.) si trasforma così

$$\log.(L+l) = \left(\frac{hL+2aM}{hL^3}\right).(2Ll+l^2) - \frac{3M}{hL}.(L+l) + \frac{3aM}{hL}.$$

Faccio $\log.(L+l) = p$ (15.), $\left(\frac{hL+2aM}{hL^3}\right).(2Ll+l^2) - \frac{3M}{hL}.(L+l) + \frac{3Ma}{hL} = q$ (16.). L'ultima equazione dopo varie operazioni prende il sottoposto aspetto

$$\left(L+l-\frac{3}{2}\frac{ML}{h}\right)^2 = \frac{hL^3}{hL+2aM}.\left(\frac{9M^2L}{4h.(hL+2aM)} - \frac{aM}{hL}+1+q\right),$$

e si costruisca nella seguente maniera.

All' asse AI (Fig. 2.) col parametro $\frac{hL^3}{hL+2aM}$ delineo la parabola ADGA, le cui ascisse $AI = \frac{9M^2L}{4h.(hL+2aM)} - \frac{aM}{hL} + 1 + q$, e le ordinate $IA = L+l-\frac{3ML}{2h}$. Aggiunta all' ordinata IA la linea $CI = \frac{3ML}{2h}$, ne risulta $CA = L+l$. Taglio poscia $AG = \frac{9M^2L}{4h.(hL+2aM)} - \frac{aM}{hL} + 1$, e resta $GI = LC = q$.

Segnata $LH = L$, che prendo in figura di protonumero, all' assintoto CK descrivo la logaritmica AHM della suttangente $= 1$, le cui coordinate $LC = p$, $CA = L+l$. Si intersechino la parabola, e la logistica nel punto A, e giacchè rispettivamente ad esso punto q, e p hanno lo stesso valore, ed altresì è comune l'ordinata $CA = L+l$, avremo $\log.(L+l) = \left(\frac{hL+2aM}{hL^3}\right).(2Ll+l^2) - \frac{3M}{hL}.(L+l) + \frac{3aM}{hL}$ qualmente richiede l'equazione (12.), e perciò CA sarà la massima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oscilla.

XIV. L'allungamento l può esser minimo o perchè sia infinita la naturale rigidità h della corda, relativa alla forza stirante $\frac{aM}{L}$, o perchè sia infinitesimo l'angolo (Fig. 3.) ACP. In ambo le

circostanze

circostanza si avrà $\log.(L+l) = \frac{l}{L}$, e riuscirà trascurabile la quantità rispettivamente nulla l^2. Scopriremo pertanto, ridotto il computo

$$\frac{3ML.(L-a)}{hL+2aM-3ML} = f \quad (17.)$$

Sia infinitamente grande la rigidità h, e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad hL, avremo $\frac{3M.(L-a)}{h} = f$.

Se stando dentro i limiti del finito la rigidità h, fosse (Fig. 3.) infinitesimo l'angolo ACP, e per conseguenza minima la tangente $MP = b$ dell'arco MQ descritto col raggio $CM = a$; onde ne risulti $QP = L-a$, si avrebbe $L^2 - a^2 = b^2$, ossia $L-a = \frac{b^2}{L+a}$; e giacchè adequatamente $a = L$, ne risulterebbe $L-a = \frac{b^2}{2L}$. Nel numeratore della formola (17.) si ponga in cambio di $L-a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore si collochi $2ML$ in vece di $2aM$, e ci si presenterà $\frac{3Mb^2}{2hL+2ML} = f$.

Della forza viva d'alcuni corpi
che ruzzolano, sopra un piano, oppure girano
movendosi ancora, se così piace, per
una direzione orizzontale
Dissertazione
inserita nel Tomo IV. delle Memorie di Matematica,
e Fisica della Società Italiana: presso
Dionigi Ramanzini.
alla pag. 96
1788.
Verona

Della Forza viva di alcuni Corpi, che ruzzolano sopra un piano orizzontale, o pure girano intorno ad un asse verticale, movendosi ancora, se così piace, per una direzione orizzontale.

Dissertazione fisico-matematica del Signor Conte Giordano Riccati.

I. Se ad una sfera, che posa sopra un piano orizzontale, si dia un impulso, tutte le sue particole non si muovono colla stessa velocità per una direzione parallela ad esso piano, ma la resistenza, che patisce il punto del contatto, fa sì che la sfera ruzzoli lungo il piano medesimo. Se il punto del contatto non acquista veruna velocità orizzontale, la sfera si rotola semplicemente, e quando un dato punto, che toccava il piano, ritorna al contatto, il centro della sfera ha corso uno spazio uguale alla circonferenza della sfera medesima. Ma se il punto del contatto per opera dell'urto concepisse qualche velocità orizzontale, nel momento in cui esso punto dopo un'intera rivoluzione tocca nuovamente il piano, il centro della sfera ha passato uno spazio maggiore della circonferenza del circolo massimo della sfera stessa, ed in questo caso il moto della sfera è più che di rotazione, eguagliandosi ad un moto di rotazione accresciuto d'una velocità orizzontale comune alla sfera intera. Il movimento della sfera sarebbe meno che di rotazione, se mentre ruzzola sopra il piano, retrocedesse con una data velocità orizzontale. Sembrami molto importante il determinare la forza viva di questi corpi che ruzzolano, per sapere quale impulso ad essi si debba imprimere, acciocchè d'una conosciuta forza viva facciano acquisto, ed il centro per esempio di una sfera si mova con una nota velocità. Vogliasi (Fig. 1.) che la sfera A elastica rotoli sopra il piano orizzontale AG, e se saprò la misura della sua forza viva, potrò agevolmente determinare l'altezza DB, da cui per guadagnare la detta forza viva, dee discendere la sfera eguale ed elastica B, la quale dopo l'urto restando immobile, comunichi tutta la sua forza alla palla A.

II. I problemi più semplici mi fanno strada ai più composti. Comincio adunque dal determinare la forza viva d'una circonferenza circolare, e per conseguenza ancora d'una superficie cilindrica, che rotolano sopra un piano orizzontale. Stabilisco poscia la forza viva d'una circonferenza circolare, che ruzzola sopra un piano orizzontale, ed ha di più una velocità orizzontale o cospirante, o contraria alla direzione del rotolamento. Mi inoltro a trovare la forza viva d'un circolo, e conseguentemente anche d'un cilindro, che rotolano sopra un piano orizzontale, considerando i due casi, che siano privi, o forniti di velocità orizzontale positiva, o negativa. Dopo ciò considero

una

una linea composta in riguardo all'asse verticale di due rami simili, ed uguali, uno a destra, e l'altro a sinistra, che girandosi intorno ad un asse verticale, orizzontale, generi una superficie, e supposto che questa si rotoli sopra un piano orizzontale, coll'aggiunta altresì, se così piace, di una velocità orizzontale, la cui direzione sia normale all'asse predetto, vado in traccia della sua forza viva. Finalmente se la superficie serrata dalla nominata linea, e dall'asse orizzontale giri intorno al detto asse, e generi un corpo, il quale si rotoli sopra un piano orizzontale, e sia, e non sia fornito di una velocità orizzontale normale all'asse mentovato, io cerco anche di questo corpo la forza viva.

III. Alla è non poco profittevole la riflessione, che il moto di rotazione di una circonferenza, di una superficie, di un corpo è lo stesso che quello di un determinato giramento intorno all'asse orizzontale, il quale cammini orizzontalmente con quella stessa velocità, ond'era dotato nel moto di rotazione. Quindi in ambo gl'incontri la forza viva avrà il medesimo valore, e perciò come per corollario si deduce la forza viva di una trottola, che giri intorno all'asse verticale, e viaggi lungo una linea segnata nel piano orizzontale con una data velocità.

So benissimo, che si potrebbe far transito a problemi molto più complicati; ma io mi contento di dare presentemente a chi legge questi, che chiamerò elementi, del moto di rotazione.

La circonferenza circolare $ADBH$ (Fig. a) rotoli sopra il piano orizzontale AG, e sia nota la velocità del centro C: si dimanda la forza viva della detta circonferenza, e per conseguenza ancora di una superficie cilindrica, la cui base $ADAHA$.

IV. Sia $AC = a$, $AI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $AMD = s$, $DE = ds$, e si chiami u la velocità del punto C, ed f la forza viva dell'arco AMD. Quando il punto del contatto si è trasferito dall'A sino in K per lo spazio $AK = DE = ds$, ed il centro C si è mosso orizzontalmente per lo spazio eguale Cc, è seguito un moto equivalente a quello di giramento intorno al punto A. In fatti egli è noto, che il punto D descrive la cicloide NDd, e che la linea AN si agguaglia all'arco $AMD = s$, e perciò ritenute le denominazioni di $AI = OD = x$, di $ID = AO = y$, avremo $NO = s - y$, e conseguentemente $DL = ds - dy$. Ora $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $dy = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; dunque $DL = ds - dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ essendo $Ld = dx$, scopriremo essere $DL : Ld :: x : \sqrt{(2ax - x^2)} = y$; ma anche quando si descrive l'arco Dd col raggio AD, la similitudine dei triangoli DEd, AID mi somministra la stessa analogia $DL : Ld :: AI = x :$

ID

ID = y; dunque l'archetto circolare Dd si confonda col cicloidale Dd, e veramente si può supporre, che il punto D descrivendo l'archetto Dd si giri intorno al punto A. Averemo dunque AC : AD :: Cc : Dd : ma gli spazj Cc, Dd stanno come le velocità dei punti C, D; dunque AC = a : AD = z :: u : $\frac{uz}{a}$, che sarà la velocità del punto D.

Ora la forza viva dell'elemento DE = ds si eguaglia alla massa ds del detto elemento moltiplicata nel semiquadrato della velocità del punto D; dunque siamo pervenuti all'equazione $\frac{u^2 z^2 ds}{2a^2} = df$: ma $z^2 = 2ax$, $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$; eseguite dunque le sostituzioni, e le operazioni convenienti, $u^2 . \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = df$, o sia $u^2 . \left(\frac{a\,dx - a\,dx + x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}\right) = df$, e passando all'integrazione, $u^2 . (s - \sqrt{(2ax-x^2)}) = f$. Non aggiungo costante; perchè all'arco AMD = s = 0 ci corrisponde AI = x = 0, e com'è di dovere f = 0. Si osservi essere AI = x = 0, quando s = ADBHA; dunque in tale incontro la forza viva di tutta la circonferenza, cioè $f = u^2 s$.

V. Se l'intera circonferenza circolare si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva = $\frac{u^2 s}{2}$ la metà di quella della stessa circonferenza, che ruzzola colla legge, che il centro C si muova colla velocità u.

Che se tutta la circonferenza si movesse colla velocità $u\sqrt{2}$, si scoprirebbe fornita della forza viva $u^2 s$ eguale a quella della circonferenza, che ruzzola colla legge predetta.

La circonferenza ADBHA molle, e non elastica venga spinta contro il piano AG per la direzione DA. La sua velocità si risolverà nelle due IA, che si consuma nell'urto, ed ID parallela al piano AG. Sia tale la frizione della circonferenza col piano, che il punto A perda tutto il suo moto, ed accaderà che se la velocità parallela al piano della circonferenza era prima dell'urto = $u\sqrt{2}$; dovendosi fare il giro intorno al punto A, la velocità di qualsivoglia punto D diverrà proporzionale alla distanza AD, serbata la legge, che si conservi nella rotale circonferenza la forza viva $u^2 s$, e perciò qualsisia punto D si moverà colla velocità $\frac{uz}{a} = \frac{u\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$, il centro C colla velocità u, ed il punto A colla velocità = 2u. Quindi urtando la circonferenza nel piano AG, ed estinguendosi tutta la velocità del punto A, la velocità orizzontale del punto A si accrescerà in ragione di $u\sqrt{2}$: 2u, o sia di 1 : $\sqrt{2}$.

Il circolo AFBHA (Fig. 31) ruzzoli sopra il piano orizzontale AG, e sia nota la velocità del centro C: si dimanda la forza viva della circonferenza concentrica KDLNK.

VI. Sia AC = a, KC = b, AK = AL = c, KI = x, ID = y, AD = z, KMD = s, DE = ds, e si nomini u la velocità del centro C, ed f la forza viva dell'arco

KMD

KMD. Facendosi per le cose dette al numero IV. il movimento intorno al punto A, sarà la velocità del punto D $= \frac{uz}{a}$, e la forza viva dell'elemento DE $= ds$, cioè $df = \frac{u^2 z^2 ds}{2a^2}$. Si rifletta essere $z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2$, e giacchè $y^2 = 2bx - x^2$, $z^2 = c^2 + (2c + 2b).x$: ma $2c + 2b = 2a$; dunque $z^2 = c^2 + 2ax$. Abbiamo inoltre $ds = \frac{b\,dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, e perciò $df = \frac{u^2.(c^2 b\,dx + 2abx\,dx)}{2a^2.\sqrt{(2bx - x^2)}}$ $= \frac{u^2}{2a^2}.\frac{(c^2 b\,dx + 2ab^2 dx)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{u^2}{2a^2}.\frac{(2ab^2 dx - 2abx\,dx)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{u^2}{2a^2}.(c^2 + 2ab).\frac{b\,dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$ $- \frac{u^2}{2a^2}.2ab.\frac{(b\,dx - x\,dx)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$. Effettuata l'integrazione, troveremo $f =$ $\frac{u^2}{2a^2}.(c^2 + 2ab).s - \frac{u^2}{2a^2}.2ab.\sqrt{(2bx - x^2)}$. Non si aggiunge costante; perchè ad $s = 0$ si riferisce $f = 0$. Suppongasi $s =$ KDLNK, ed essendo in tal caso $x = 0$, ne risulterà $f = \frac{u^2}{2a^2}.(c^2 + 2ab).s$, ch'è il valore della forza viva cercata.

VII. Se l'intera circonferenza KDLNK si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$, e corrisponderebbe a quella della nostra circonferenza, che si gira e ruzzolare del circolo AFBHA, come $\frac{u^2 s}{2}$: $\frac{u^2 s}{2}.\left(\frac{c^2 + 2ab}{a^2}\right)$, cioè a dire come $a^2 : c^2 + 2ab = a^2 + b^2$

VIII. Si può anche concepire, che la nostra circonferenza KDLNK si giri intorno al punto K, onde il punto D si muova con una velocità di giramento proporzionale a KD, e di più tutta la circonferenza cammini con una velocità orizzontale proporzionale ad AK. In fatti se le due velocità avessero le direzioni KD, AK, comporrebbero la velocità per la direzione AD ed essa linea proporzionale: e nella stessa guisa sendo le loro direzioni normali nei punti D, K alle linee KD, AK, producono la velocità relativa ad AD, e normale nel punto D alla linea medesima. La prima velocità si uguaglierà ad $\frac{u.KD}{a} = \frac{u.\sqrt{(2bx)}}{a}$, e la seconda ad $\frac{uc}{a}$, e di queste due si compone la velocità $\frac{u.\sqrt{(c^2 + 2ax)}}{a}$ di giramento intorno al punto A.

Quindi la circonferenza KDLNK rispettivamente al piano orizzontale KO ruzzola, ed inoltre cammina colla comune velocità $\frac{uc}{a}$.

IX. Fingasi che la molla circonferenza KDLNK urti nel piano KO colla direzione DK. La velocità DK si risolverà nelle due IK, DI, e consumandosi quella nell'urto, resterà ad essa circonferenza la forza viva $=$ $s.\frac{u^2.(c^2 + 2ab)}{2a^2}$, posto che la velocità orizzontale DI prima dell'urto fosse $= \frac{u.\sqrt{(c^2 + 2ab)}}{a} = \frac{u.\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}$.

Rimanga al punto K dopo l'urto la velocità orizzontale $\frac{uc}{a}$, ed interverrà, che il punto qualunque D della nostra circonferenza si moverà intorno al punto K colla velocità $\frac{u\sqrt{(2bx)}}{a}$, ed intorno al punto A colla velocità $\frac{u.\sqrt{(2ax + c^2)}}{a}$, conservandosi la forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2}(c^2 + 2ab).s$

nella

nella circonferenza KDLNK.

Si osservi che prima dell'urto il punto L veniva animato dalla velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{(c^2+2ab)}}{a}$, e dopo l'urto è fornito dalla velocità $\frac{u\sqrt{(c^2+4ab)}}{a} = u\cdot\frac{(a+b)}{a}$, e perciò le dette velocità stanno come $\sqrt{(c^2+2ab)} : \sqrt{(c^2+4ab)}$, e la seconda è maggiore della prima. Al contrario la velocità orizzontale del punto K avanti l'urto era $\frac{u\sqrt{(c^2+2ab)}}{a}$; e dopo l'urto si è ridotta ad $\frac{uc}{a}$, di modo che le dette velocità si riferiscono nella proporzione di $\sqrt{(c^2+2ab)} : c$, o sia di $\sqrt{(a^2+b^2)} : a-b$, e per conseguenza il punto K dopo l'urto si move più tardi di prima.

X. Se il circolo KDLNK (fig. 4.) fosse maggiore dell'AFAHA, che ruzzola sopra il piano orizzontale AG, si troverebbe nulladimeno la forza viva dell'arco KMD, cioè $f = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(c^2+2ab)\cdot s - \frac{u^2}{2a^2}\cdot 2ab\sqrt{(2bx-x^2)}$, e la forza viva dell'intera circonferenza KDLNK $f = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(c^2+2ab)\cdot s$.

XI. Possiamo altresì immaginarci, che la nostra circonferenza ruzzolando sopra il piano orizzontale KO, si giri intorno al punto K, dimodochè il punto D si mova con una velocità di giramento proporzionale a KD, ed in oltre tutta la circonferenza viaggi da K verso P colla velocità orizzontale proporzionale ad AK. La prima velocità pareggerà la grandezza $\frac{u\sqrt{(2bx)}}{a}$, e la seconda sarà $= \frac{uc}{a}$, e di queste due velocità si compone la terza $\frac{u\sqrt{(c^2+2ax)}}{a}$ di vertigine intorno al punto A.

XII. Posto che AC = a sia minima, ne risulta AK = CD; ma il punto C si move da C verso H colla velocità orizzontale proporzionale a KA = KC, e con una pari velocità la circonferenza KDLNK, e conseguentemente anche il centro C viaggia per direzione contraria da C verso E; dunque esso centro sta in quiete, e perciò la circonferenza KDLNK gira intorno al centro C.

Quindi se la detta circonferenza gira intorno al centro C con velocità proporzionale a CK, e nello stesso tempo viaggia orizzontalmente con pari velocità da K verso O; segue in essa il medesimo movimento, come se ruzzolasse sopra il piano KO, ritenendo il centro la stessa velocità e nell'uno e nell'altro incontro, ed è fornita di egual forza viva.

XIII. Che se è finita la linea AC, concepisca la circonferenza KDLNK la stessa velocità negli stessi punti, e la medesima forza viva, o ruzzoli sopra il piano KO con velocità in ragione della distanza dal punto K, retrocedendo in oltre colla velocità proporzionale ad AK, o si giri intorno al centro C con velocità relativa a CK, e proceda altresì per la direzione KO con velocità in ragione di AC. Nella prima circostanza

sappiamo

sappiamo, che il punto D gira intorno al punto A con celerità in ragione di AD: ora egli è di uopo provare, che lo stesso succede ancora nella circostanza seconda.

Segno DQ normale, ed uguale a CD, DS normale, ed uguale ad AD, e congiunti i punti S, Q colla retta SQ, tiro ST parallela a QD, e DR normale ad SQ. Essendo retti i due angoli CDQ, ADS, levato il comune CDS, resta SDQ uguale all'ADC, e perciò SQ = AC, ed i due triangoli SDQ, ADC sono uguali. Quindi a cagione degli angoli in R, I retti, l'angolo QDR = CDI, e perciò levato il primo dall'angolo retto CDQ, ed aggiunto il secondo, ne proviene l'angolo IDR retto, e sendo altresì retto l'angolo SRD, le linee SQ, TD sono parallele, ed uguali, e conseguentemente DT = AC.

La velocità normale a CD del punto D intorno al punto C si esprime per DQ normale, ed uguale a CD, e la velocità orizzontale dello stesso punto D venga indicata dalla linea DT = AC, e dalle due mentovate velocità si comporrà la DS normale ed uguale ad AD, come si doveva dimostrare.

Se adunque la circonferenza KDLNK girerà intorno al punto C con velocità in ragione di CK, e di più camminerà per la direzione orizzontale KO colla velocità relativa ad AC, la forza viva dell'arco KMD sarà eguale ad $\frac{u^2}{2a^2}\cdot(c^2+2ab)\cdot s - \frac{u^2}{2a^2}\cdot 2ab\sqrt{(2bx-x^2)}$, e quella dell'intera circonferenza $= \frac{u^2}{2a^2}\cdot(c^2+2ab)\cdot s$.

Il circolo AFBHA (Fig. 5.) ruzzoli sopra il piano orizzontale AG, e sia conosciuta la velocità del centro C, si dimanda la forza viva di esso circolo, e per conseguenza di un cilindro di data lunghezza, cui serva di base il circolo mentovato.

XIV. Sia AC = a, CK = x, Kk = dx, AK = BL = a−x, e si chiami u la velocità del centro C, ed f la forza viva del circolo KDLNK. Ci insegna il num. VI. che la forza viva della circonferenza KDLNK = nx si esprime per $\frac{u^2}{2a^2}\cdot nx\cdot(AK^2+2ACK) = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(na^2x+nx^3)$; dunque la forza viva della zona circolare KDLNKkdlnk, cioè $df = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(na^2x\,dx+nx^3dx)$. Mi rivolgo all'integrazione, e trovo $f = \frac{u^2}{2a^2}\cdot\left(\frac{na^2x^2}{2}+\frac{nx^4}{4}\right)$ valore della forza viva del circolo KDLNK. Non si dee aggiungere la costante; perchè a CK = x = 0 ci corrisponde f = 0. Pongo CK = x = CA = a, e scopro $f = \frac{u^2}{2}\cdot\frac{3na^2}{4}$, grandezza della forza viva del circolo AFBHA.

La forza viva di un cilindro, la cui base AFBHA $= \frac{na^2}{2}$, e la lunghezza l,

sarebbe

sarebbe $= \frac{u^2}{2} \cdot \left(\frac{3na^2}{4}\right)$.

XV. Se tutto il circolo AFBHA si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{na^2}{2}$, che si riferirebbe a quella dello stesso circolo che rozzola in ragione di 2 : 3. Ma se il detto circolo camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, verrebbe animato dalla stessa forza viva scoperta nella supposizione, ch'esso rozzoli sopra il piano orizzontale AG.

Il nostro circolo privo di elasticità venga spinto obbliquamente contro il piano AG, e la sua velocità orizzontale sia $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Sia tale il pagamento del circolo col piano, che il punto A nello atto dell'urto perda tutto il suo moto, ed interverrà ch'esso circolo rozzolerà sopra il detto piano conservando la forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$. La velocità orizzontale del punto B, che prima dell'urto era $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, diverrà $= 2u$, e fra le dette due velocità passerà la ragione di $\sqrt{3} : \sqrt{8}$.

XVI. Abbiamo trovato la forza viva del circolo KDLNK $= f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4}\right)$; dunque ponendo $CK = x = b$, avremo $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4}\right)$. Se tutto il detto circolo $= \frac{nb^2}{2}$ si movesse colla velocità $\frac{u \cdot \sqrt{(2a^2+b^2)}}{a\sqrt{2}}$, sarebbe fornito della medesima forza viva. Si noti che il punto K viaggia colla velocità $\frac{(a-b)}{a} \cdot u$

Essendo dotato il circolo nella KDLNK della velocità orizzontale $\frac{u \cdot \sqrt{(2a^2+b^2)}}{a\sqrt{2}}$, urti obbliquamente nel piano orizzontale KO, ed il punto K abbia patito tale resistenza; che gli rimanga la velocità orizzontale $\frac{(a-b)u}{a}$, ed è facile da scoprire, ch'esso si moverà non altrimenti che il circolo KDLNK contenuto nello AFBHA, che rozzola sopra il piano AG: la velocità orizzontale del punto L, che prima dell'urto era $= \frac{u \cdot \sqrt{(2a^2+b^2)}}{a\sqrt{2}}$, giungerà alla misura $\frac{u \cdot (a+b)}{a}$, e per conseguenza le dette velocità si corrisponderanno nella ragione di $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{2}b^2)} : a+b$.

XVII. Dal num.ro XIII. egli è lo stesso, che la circonferenza KDLNK rozzoli sopra il piano KO con velocità relative alle distanze dal punto K, ~~oppure~~ movendosi inoltre per la direzione KO colla velocità relativa ad AK, o pure che si giri intorno al punto C con velocità in ragione di CK, e di più cammini per la direzione AG colla celerità proporzionale ad AC.

In ambo le circostanze adunque sarà fornita della stessa forza viva, e perciò il sovrapposto calcolo m'insegnerà, che il circolo KDLNK girante intorno al punto C con velocità proporzionali alle distanze da esso C, e che viaggia orizzontalmente da G verso H colla velocità proporzionale ad AC, viene animato dalla forza viva $f =$

$\frac{u^2}{2a^2}$

$\frac{u^2}{2a^2}\cdot\left(\frac{na^2x^2}{2}+\frac{nx^4}{4}\right.$

La linea NLD (Fig. 6.) composta di due rami simili ed uguali LD, LN si giri intorno all'asse orizzontale ND, e generi una superficie. Ruoti questa in riguardo alla circonferenza KL sopra un piano orizzontale lungo una linea normale al piano di questa carta, e di più si mova per la stessa direzione colla velocità proporzionale ad AK: si dimanda la forza viva della detta superficie, posto che sia nota la velocità del centro C, e sia dall'asse ND, proporzionale ad AC.

XVIII. Sia AC = a, KC = CL = b, AK = c, AE = AH = x, nx la circonferenza del raggio x, IH = a − x, CB = y, BP = dy, EF = HM = ds, CD = CN = g. Si nomini u la velocità del punto C, ed f la forza viva della superficie LEHKL. Dal num.o VI. la forza viva della circonferenza circolare del raggio AE = x si uguaglia alla grandezza $\frac{u^2}{2a^2}\cdot(\overline{IH}^2+2IBH)\cdot nAE = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(a^2+x^2)\cdot nx = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(a^2nx+nx^3)$. Si moltiplichi questa quantità per EF = ds, e ne risulterà la forza viva $df = \frac{u^2}{2a^2}\cdot(a^2nx+nx^3)\cdot ds$ della superficie elementare EFMHE. Integrando poscia avremo la forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2}\int(a^2nx+nx^3)\cdot ds$ della superficie LEHKL.

XIX. Sia retta la linea $LD = V(b^2+g^2)$, e giacchè CL : LD :: EQ : EF, o pure analiticamente $b : V(b^2+g^2) :: -dx : ds = \frac{-dx\,V(b^2+g^2)}{b}$, ne proviene il valore di ds dato per x. Adempiuta la sostituzione, avremo $df = \frac{u^2\cdot V(b^2+g^2)}{2a^2b}\cdot(-a^2nx\,dx - nx^3dx)$, ed integrando, $f = \frac{u^2V(b^2+g^2)}{2a^2b}\cdot\left(A-\frac{na^2x^2}{2}-\frac{nx^4}{4}\right)$. Si determina il valore della costante A riflettendo, che nel sito KL ed f = o corrisponde x = b, onde si abbia $A = \frac{na^2b^2}{2}+\frac{nb^4}{4}$. e quindi ci si presenta l'integrazione compiuta $f = \frac{u^2\cdot V(b^2+g^2)}{2a^2b}\cdot\left(\frac{na^2b^2}{2}+\frac{nb^4}{4}-\frac{na^2x^2}{2}-\frac{nx^4}{4}\right.$. Nel punto D è x = o, e perciò la forza viva della superficie LDKL, cioè $f = \frac{u^2\cdot V(b^2+g^2)}{2a^2}\cdot\left(\frac{na^2b}{2}+\frac{nb^3}{4}\right)$, e quella della intera superficie LDKL + LNKL $= 2f = \frac{u^2V(b^2+g^2)}{2a^2}\cdot\left(na^2b+\frac{nb^3}{2}\right)$.

XX. Conciossiachè la nostra doppia superficie conica si agguaglia ad $nbV(b^2+g^2)$, s'essa si movesse colla velocità $\frac{u}{a}V(a^2+\frac{1}{2}b^2)$, sarebbe fornita della medesima forza viva, onde viene animata allorachè ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che il punto C cammini colla velocità = u. Le velocità dunque del detto punto si corrisponderebbero nella ragione di $a : V(a^2+\frac{1}{2}b^2)$. Posta b = a, il moto della superficie sarebbe di semplice

rotazione

rotazione rispettivamente alla circonferenza KL, e si avrebbe $2f = \frac{3nau^2\sqrt{(a^2+g^2)}}{4}$.

XXI. La stessa forza viva $2f = \frac{u^2\sqrt{(b^2+g^2)}}{2a^2}\cdot\left(na^2b + \frac{nb^3}{2}\right)$ competerebbe alla nostra superficie, che si rivolgesse intorno all'asse ND colla legge, che il punto K fosse dotato della velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità u. Questa forza viva si può anche esprimere così $2f = y^2\sqrt{(b^2+g^2)}\cdot\left(\frac{na^2}{2b} + \frac{nb}{4}\right)$, sostituendo in vece di u il suo valore $\frac{ay}{b}$.

Fingasi AC = a = 0, e si scoprirà $2f = \frac{nby^2\sqrt{(b^2+g^2)}}{4}$, ed in questo caso la superficie, stando immobile l'asse ND, intorno ad esso si gira, ed è fornita di una forza viva, ch'è la metà di quella, che le competerebbe, se si movesse tutta colla velocità v, colla quale si gira il punto K, o sia la circonferenza KL.

XXII. Sia NLD un semicircolo, e poichè $EF = ds = \frac{-b\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$, avremo $df = \frac{u^2}{2a^2}\cdot\left(\frac{-a^2bnx\,dx - bnx^3dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}\right) = \frac{u^2bn}{2}\cdot\frac{-x\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} + \frac{u^2bn}{2a^2}\cdot\frac{-x^3dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$. L'integrale di $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$ è $\sqrt{(b^2-x^2)}$. Per integrare la quantità $\frac{-x^3dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$, si osservi essere $x^2 = b^2-y^2$, $x\,dx = -y\,dy$, $\sqrt{(b^2-x^2)} = y$, e perciò $\frac{-x^3dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = \frac{(b^2-y^2)\cdot y\,dy}{y} = b^2dy - y^2dy$, e $\int\frac{-x^3dx}{\sqrt{(b^2-x^2)}} = b^2y - \frac{y^3}{3} = b^2\sqrt{(b^2-x^2)}\ \frac{(-b^2+x^2)}{3}\cdot\sqrt{(b^2-x^2)} = \frac{(2b^2+x^2)\cdot\sqrt{(b^2-x^2)}}{3}$.

Sarà pertanto $f = A + \frac{u^2bn}{2}\cdot\sqrt{(b^2-x^2)} + \frac{u^2bn}{2a^2}\cdot\frac{(2b^2+x^2)}{3}\cdot\sqrt{(b^2-x^2)}$. Ad $f = 0$ ci corrisponde $x = b$, e quindi $A = 0$, e per conseguenza $f = \frac{u^2bn}{2}\cdot\sqrt{(b^2-x^2)} + \frac{u^2bn}{2a^2}\cdot\frac{(2b^2+x^2)}{3}\cdot\sqrt{(b^2-x^2)}$ sarà la forza viva della superficie LEHKL, che si move colle descritte condizioni. Essendo nel punto D $x = 0$, ne risulta la forza viva della superficie emisferica $f = \frac{u^2nb^2}{2} + \frac{u^2nb^4}{3a^2}$, e quella di tutta la sferica superficie $2f = 2nb^2\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^2b^2}{3a^2}\right)$.

XXIII. Poichè la nostra sferica superficie si agguaglia a $2nb^2$, s'essa camminasse colla velocità $\frac{u\cdot\sqrt{(a^2+\frac{2}{3}b^2)}}{a}$ avrebbe quella stessa forza viva, di cui è fornita, quando rotolando sopra un piano orizzontale, l'asse ND si move colla velocità $= u$. Dato che fosse $b = a$, il moto sarebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL, e si scoprirebbe $2f = 2nb^2\cdot\frac{5u^2}{6}$.

XXIV. La medesima forza viva $2f = 2nb^2\cdot\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^2b^2}{3a^2}\right)$ converrebbe alla sferica superficie, se si rivolgesse intorno all'asse ND colla legge, che il punto K girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed inoltre viaggiasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{ay}{b}$. Surrogando in cambio di u il suo valore $\frac{ay}{b}$, la mentovata forza viva può prendere

il

il seguente aspetto $2f = 2nb^2.(\frac{a^2u^2}{2b^2}+\frac{v^2}{3})$.

Suppongasi AC = a = 0, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2v^2}{3}$. In tal circostanza essendo $u = \frac{ay}{b} = 0$, l'asse ND sta in riposo, e la superficie sferica intorno all'asse si gira. Si osservi che sendo la detta superficie $= 2nb^2$, la sua forza viva sta a quella $2nb^2.\frac{v^2}{2}$, che le converrebbe, se si movesse tutta colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, come $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$, cioè come 2 : 3.

La superficie NLD (Fig. 6.) chiusa dall'asse ND, e dai due rami di curva simili, ed uguali LD, LN giri intorno al detto asse orizzontale ND, e generi il corpo LDKNL. Rotoli questo in riguardo al circolo KL sopra un piano orizzontale, lungo una linea normale al piano di questa carta, ed in oltre si muova per la stessa direzione colla velocità, che a quella di rotazione del punto L sia come AK : KL: si dimanda la forza viva di esso corpo, posto che sia nota la velocità dell'asse ND proporzionale ad AC.

XXV. Sia AC = a, KC = CL = b, AK = c, CD = CN = g, BE = BH = x, nx la circonferenza del raggio x, IH = a − x, CB = y, BP = dy. Si chiami u la velocità dell'asse ND, ed f la forza viva del pezzo di corpo LEHK. Ci insegna il num.ro XIV., che la forza viva del circolo HE, il cui raggio x, pareggia la quantità $\frac{u^2}{4a^2}.(2na^2x^2+nx^4)$. Si moltiplichi essa per AP = dy, e ne proverrà la forza viva $df = \frac{u^2}{4a^2}.(2na^2x^2+nx^4).dy$ dall'elemento di corpo EFMH, ed integrando avremo $f=\int\frac{u^2}{4a^2}.(2na^2x^2+nx^4)dy$ forza viva del corpo LEHK.

XXVI. Suppongasi retta la linea $LD = \sqrt{(b^2+g^2)}$, e perchè LC : CD :: EQ : QF
b : g :: −dx : dy,
scopriremo $dy = -\frac{g\,dx}{b}$, e per conseguenza $df = \frac{ngu^2}{4a^2b}.(-2a^2x^2dx - x^4dx)$. Passo all'integrazione, ed ho $f = A - \frac{ngu^2}{4a^2b}.(\frac{2a^2x^3}{3}+\frac{x^5}{5})$. Nel posto KL ad f = 0 ci corrisponde x = b, e perciò $A = \frac{ngu^2}{4a^2}.(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5})$. Quindi la integrazione compiuta $f = \frac{ngu^2}{4a^2}.(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}-\frac{2a^2x^3}{3b}-\frac{x^5}{5b})$: ma rispettivamente al punto D x = 0; dunque l'intero cono LDK sarà fornito della forza viva $f = \frac{ngu^2}{4a^2}.(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5})$, ed il doppio cono LDKNL della forza viva $2f = \frac{ngu^2}{4a^2}.(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5})$.

XXVII. Eguagliandosi la massa del nostro corpo ad $\frac{nb^2g}{3}$, se essa si movesse colla velocità $\frac{u}{a}\sqrt{(a^2+\frac{3b^2}{10})}$, avrebbe quella stessa forza viva, da cui viene animato, quando ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che l'asse ND viaggi colla celerità u. Le velocità dunque del detto asse si riferirebbero nella proporzione di $a : \sqrt{(a^2+\frac{3}{10}b^2)}$.

Posta $b=a$, il moto del corpo sarebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL, e si troverebbe $2f = \frac{ngu^2}{4}\cdot(\frac{2b^2}{3}+\frac{b^2}{5}) = \frac{ngu^2}{4}\cdot(\frac{13b^2}{15}) = \frac{nb^2g}{3}\cdot\frac{13u^2}{20}$.

XXVIII. La stessa forza viva $2f = \frac{ngu^2}{4a^2}\cdot(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5})$ apparterrebbe al nostro corpo, che si rivolgesse intorno all'asse ND colla condizione, che il circolo KL girasse colla velocità $\frac{bu}{a}=v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla celerità $u=\frac{av}{b}$. Sostituendo in luogo di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la mentovata forza viva si può anche esprimere come segue $2f = \frac{ngv^2}{4}\cdot(\frac{2a^2}{3}+\frac{b^2}{5})$.

Se $AC=a=0$, la velocità $u=\frac{av}{b}$ dell'asse ND sarà uguale a nulla, ed il corpo, che girerà intorno al detto asse immobile, sarà fornito della forza viva $2f = \frac{ngb^2v^2}{20} = \frac{nb^2g}{3}\cdot\frac{3v^2}{20}$. Se tutto esso corpo si movesse colla velocità v, colla quale girasi il circolo KL, verrebbe animato dalla forza viva $\frac{nb^2g}{3}\cdot\frac{v^2}{2}$, a cui quella del corpo, che si rivolge intorno all'asse ND, sta come $\frac{3}{20}:\frac{1}{2}$, o sia come $3 : 10$.

XXIX. Dalle cose dimostrate si deduce come per corollario la misura della forza viva di una trottola di figura conica, in cui la circonferenza del circolo massimo si giri intorno all'asse colla velocità v.

Se l'asse è immobile, abbiamo $f = \frac{nb^2gv^2}{40}$, e se l'asse si move in un piano orizzontale per una data direzione colla velocità $u=\frac{av}{b}$, alla trottola compete la forza viva $f = \frac{ngv^2}{8}\cdot(\frac{2a^2}{3}+\frac{b^2}{5})$.

XXX. Sia NLD una mezza elissa, la cui equazione $(g^2-y^2)\cdot\frac{b^2}{g^2}=x^2$. Nella formola $df = \frac{u^2}{4a^2}\cdot(2na^2x^2+nx^4)\cdot dy$ si sostituisca in cambio di x^2 il suo valore, e ne risulterà $df = \frac{u^2nb^2}{4a^2}\cdot(2a^2dy - \frac{2a^2y^2dy}{g^2} + b^2dy - \frac{2b^2y^2dy}{g^2} + \frac{b^2y^4dy}{g^4})$. La integrazione ci dà $f = \frac{u^2nb^2}{4a^2}\cdot((2a^2+b^2)\cdot y - \frac{(2a^2+2b^2)\cdot y^3}{3g^2} + \frac{b^2y^5}{5g^4})$. Non aggiungo costante; perchè com'è di dovere, ad $y=0$ ci corrisponde $f=0$. La forza viva trovata conviene al pezzo di elissoide LEHK.

Poichè nel punto D $y=g$, sarà $f = \frac{u^2nb^2}{4a^2}\cdot(\frac{4a^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{5})\cdot g = \frac{u^2nb^2}{4a^2}\cdot(\frac{20a^2+8b^2}{15})\cdot g = \frac{u^2nb^2}{2a^2}\cdot(\frac{5a^2+2b^2}{15})\cdot g$ la forza viva della mezza sferoide LDK, e quella di tutta la sferoide intera LDKNL $2f = \frac{u^2nb^2}{a^2}\cdot(\frac{5a^2+2b^2}{15})\cdot g$. Si inferisca, che la forza viva di una sferoide, e di una sfera, che differiscono soltanto nel semiasse CD,

si

si riferirebbero nella proporzione di $g:b$ [illegible]

XXXI. Concossiaché la massa della sferoide pareggi la grandezza $\frac{2nb^2g}{3}$, se camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{(a^2+\frac{2}{5}b^2)}}{a}$, avrebbe la medesima forza viva, di cui è dotata, quando rotolando sopra un piano orizzontale, l'asse ND si muova colla velocità u.

Se il punto A coincidesse col punto K il moto sarebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL, e ne risulterebbe $2f = \frac{2nb^2g}{3}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\frac{7}{5}$.

XXXII. La stessa forza viva $2f = \frac{2nb^2g}{3}\cdot\frac{u^2}{2a^2}\cdot(a^2+\frac{2}{5}b^2)$ competerebbe alla nostra sferoide, se circolasse attorno l'asse ND colla condizione, che la massima circonferenza KL girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed altresì la sferoide tutta camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Ponendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la nominata forza viva si può esprimere come segue $2f = \frac{2nb^2g}{3}\cdot\frac{v^2}{2b^2}\cdot(a^2+\frac{2}{5}b^2) = \frac{ngv^2}{3}\cdot(a^2+\frac{2}{5}b^2)$.

Fingasi $AC = a = 0$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2gv^2}{15}$. Sendo in tale congiuntura $u = \frac{av}{b} = 0$, l'asse ND non fa moto, e la sferoide girasi intorno all'asse. Egli è da notarsi, che la sua forza viva si riferisca a quella $\frac{2nb^2g}{3}\cdot\frac{v^2}{2}$, che le converrebbe se tutta si movesse colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, nella ragione di $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$, o sia di $2:5$.

Acciocché le due forze vive fossero uguali, bisognerebbe, che l'intera sferoide camminasse colla velocità $v\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Il Nulla Immaginario non può confondersi
col reale. Teorema inserto
nel Tomo IV alla pag. 116. delle Memorie
di Matematica, e Fisica della
Società Italiana.
per Dionigi Ramanzini
1788
Verona

Il nulla immaginario non può confondersi col reale

Teorema

dimostrato dal Signor Conte Giordano Riccati

I. Il celebratissimo Signor Leonardo Eulero con un ingegnoso metodo determina (chiamata p la semicirconferenza circolare del raggio $= 1$.) $\log.\, 1 = \pm\, 0 \cdot p\sqrt{-1}, \pm\, 2p\sqrt{-1}, \pm\, 4p\sqrt{-1}$, &c.; $\log.\, -1 = \pm\, p\sqrt{-1}, \pm\, 3p\sqrt{-1}, \pm\, 5p\sqrt{-1}$, &c., e confondendo il nulla immaginario col reale, cava la conseguenza, che $\log.\, 1$. ha un valor reale $= 0$, ed infiniti immaginarj; laddove a $\log.\, -1$. non competono salvochè infiniti valori immaginarj, e questa illazione la estende a qualunque numero positivo, e negativo.

II. Affermo frattanto essere immaginario $\log.\, 1 = 0 \cdot p\sqrt{-1}$, e che col metodo del lodato Autore non si scoprono pei $\log.\, \pm 1$ senonsè valori immaginarj, a cagione che il nulla immaginario non può confondersi col reale. Per trovare i logaritmi reali dei numeri positivi, e negativi, egli è d'uopo ricorrere o alla quadratura dell'iperbola conica fra gli assintoti, o alla formola esponenziale $f(\underline{g})^{\frac{y}{h}} = x$, nella quale f significa il protonumero, y il logaritmo, x il numero, ed h, g un logaritmo, ed un numero corrispondenti, il qual logaritmo sia dotato della condizione di eguagliarsi ad un numero pari:

III. Provo evidentemente, che il nulla immaginario non può considerarsi come un nulla reale, deducendo questa verità dalli equazione del ramo inferiore della concoide. Sia BDI (Fig. 1.) la metà del ramo inferiore della concoide

concoide

·5·3·R

concepita; ~~Sia BD la metà dell'esponente~~ ~~...dalla concepita~~, la quale è fornita dalla proprietà, che tirate a squadra le due rette AF, AG, e menata dal punto fisso C la linea CF, e tagliata FD uguale alla data AB, il punto D apparterrà alla curva. Pongasi $AB = FD = a$, $AC = b$, $AE = GD = x$, $ED = AG = y$, ed essendo $EF = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, $GC = b - y$, dall'analogia

$$GD : GC :: EF : ED$$
$$x : b-y :: \sqrt{(a^2-y^2)} : y$$

si raccoglierà la nota equazione $x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, ovvero $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, espressione spettante all'intero ramo inferiore IDBdi, della nostra curva. Suppongasi, qualmente la Figura (2.) dimostra, $AC = b > AB = a$, e posta $AG = y = AC = b$, scopriremo $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(a^2-b^2)}$, ossia $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$, cioè a dire $\pm x$ uguale al nulla immaginario. Resteremo convinti, che questo non possa far figura di un nulla reale, riflettendo che il punto C non appartiene alla curva IDBdi; imperciocchè per esso non passa il punto D descrivente la curva.

IV. Facciasi ora $AG = y = AB = a$, e l'equazione prenderà il seguente aspetto $\pm x = \frac{(b-a)}{a} \cdot \sqrt{(a^2-a^2)} = (b-a) \cdot 0$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Nel punto B adunque $\pm x$ si uguaglia al nulla reale, ed in fatti il punto B spetta alla curva ADI, passando per lo stesso il punto descrivente D.

Se fosse $AC = b = AB = a$, il punto C coinciderebbe col punto B, ed uguagliandosi

$\pm x$

$\pm x$ al nulla reale, la curva si appropriarebbe il punto C.

Fingasi $AG = y > AB = a < AC = b$, ed una tal quantità pongasi $= c$. In questa ipotesi ci si presenterà l'equazione $\pm x = \left(\frac{b-c}{c}\right)\cdot\sqrt{(a^2-c^2)} = \left(\frac{b-c}{c}\right)\cdot\sqrt{(c^2-a^2)}\sqrt{-1}$ quantità immaginaria

Che se si supponga $AG = y > b$, onde si abbia $y = e > b$, ne proverrà la formola $\pm x = \left(\frac{b-e}{e}\right)\cdot\sqrt{(e^2-a^2)}\sqrt{-1}$ grandezza parimente immaginaria.

V. E qui egli è d'uopo fare la riflessione, che trovandosi procedendo da B verso A i valori reali di x, e procedendo da B verso C i valori immaginarj, abbiamo è vero in B un nulla di quantità immaginaria, ma abbiamo altresì un nulla di quantità reale, e perciò il punto B compete alla curva BDI.

Ma in riguardo al punto C si incontra l'immaginario tanto da C verso B, quanto da C verso H, e conseguentemente in C v'è un doppio nulla di quantità immaginaria, e per questa ragione il detto punto non appartiene alla curva.

VI. Resta da considerarsi l'ipotesi, che sia $AC = b < AB = a$, nella quale la curva si adatta alla figura (2.). Stabilita $y = b$, si trova $\pm x = 0\cdot\sqrt{(a^2-b^2)}$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Trovandosi i valori reali di $\pm x$ e da C verso A, e da C verso A', il punto C per doppio titolo ha luogo nella curva BKCDI.

Il punto B conviene alla curva, perchè in esso congiuntamente, come nella figura (1.) $\pm x = \begin{cases} 0 \\ 0\sqrt{-1} \end{cases}$, rinvenendosi il primo nulla

quando

quando si arriva da A in B, ed il secondo nulla quando si giunge da H in B.

VII. I medesimi discorsi si possono applicare alla curva dell'equazione $\pm x = \left(\frac{b-y}{b}\right)\sqrt{(a^2-y^2)}$ Fig. (3.) Descritte a squadra le due rette CB', Ii, che si intersechino nel punto A, taglio AB = AB' = a, AC = b > a, AG = y = AG' = −y, e fatte GF = G'F' = a, pei punti C, F conduco la linea CD', la quale s'incontrerà nei punti D, D' colla linea GD, G'D' normali a CB', i quali due punti apparterranno ai due rami inferiore IDBdi, e superiore ID'B'd'i' onde si abbia GD = x, G'D' = x della curva, che vogliamo delineare. Ed infatti per la similitudine dei triangoli CAF, CGD = CGd, CG'D' = CG'd' abbiamo le analogie CA : AF :: CG : GD = Gd

$b : \sqrt{(a^2-y^2)} :: b-y : \pm x$

CA : AF :: CG' : G'D' = G'd'

$b : \sqrt{(a^2-y^2)} :: b-y : \pm x$

che ci danno $\pm x = \left(\frac{b-y}{b}\right).\sqrt{(a^2-y^2)}$, ch'è l'equazione proposta.

VIII. Supponendosi AC = b > AB = a, se si faccia AG = y = AC = b, si troverà $\pm x = 0.\sqrt{(a^2-b^2)} = 0.\sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$ uguale al nulla immaginario. Si renderà manifesto, ch'esso non possa considerarsi come un nulla reale, osservando che il punto C non conviene alla curva IDAdi, la quale, se BB' sia verticale, non discende più abbasso del punto B, a cui perviene, quando, essendo $AF = \sqrt{(a^2-y^2)} = 0$, i due punti G, D si congiungono in B.

Stabilita AG = y = AB = a, ne risulta $\pm x = (b-a).0$, ossia $\pm x$ uguale al nulla reale, e perciò il punto B spetta alla curva IDAdi.

Lo

Lo stesso accaderebbe, se fosse $AC = b = AB = a$; imperocchè il punto C coinciderebbe col punto A.

Sia $AG = y > AB = a < AC = b$, e tale grandezza pongasi $= c$; onde ci si offerisca l'equazione $\pm x = \left(\frac{b-c}{b}\right) \cdot \sqrt{(a^2 - c^2)} = \left(\frac{b-c}{b}\right) \cdot \sqrt{(c^2 - a^2)}\sqrt{-1}$, che determina $\pm x$ uguale ad una quantità immaginaria.

Se poi si faccia $AG = y > b$, dimodochè si abbia $y = a > b$, ne deriverà la formola $\pm x = \left(\frac{b-a}{b}\right) \cdot \sqrt{(a^2 - a^2)}\sqrt{-1}$, grandezza altresì immaginaria.

Ai punti B, C si accomodano le riflessioni, che si leggono al numero V., e che io stimo superfluo il ripetere.

IX. Passo ad esaminare la supposizione di $AC = b < AB = a$, in cui la curva vien espressa dalla Figura (4.). Determinata $y = b$, si scopre $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè x ugual al nulla reale. Incontrandosi i valori reali di x e da C verso A, e da C verso B; il punto C per doppia ragione appartiene alla curva IDCKAKCdi

X. Da quanto ho scritto si deducono i seguenti Corollarj.

1. Se ad y reale si riferisca x uguale al nulla reale, il punto estremo di y compete alla curva, quantunque allo stesso punto corrisponda x uguale al nulla immaginario.

2. Se ad y reale si adatta soltanto x uguale al nulla immaginario, l'ultimo punto di y non conviene alla curva.

3. Quindi il nulla immaginario non può confondersi col reale, e conseguentemente i logaritmi dell'unità positiva, e negativa

seguenti

scoperti dall' Eulero col suo metodo sono tutti immaginarj.

XI. Se al punto estremo B (Fig. 5.) del protonumero AB = 1. corrispondesse unicamente il logaritmo uguale al nulla immaginario, il detto punto non competerebbe alla curva, ed intanto le compete, inquanto che ad esso punto si riferisce il logaritmo ugual al nulla reale. Dipende ciò dalla natura della logaritmica, in cui ad una serie geometrica di numeri reali dee riferirsi una serie aritmetica di logaritmi reali. Nella logistica delle tavole si hanno le due progressioni relative di numeri, e di logaritmi

$$\&c.\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100\ \&c.$$

$$\&c.\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ \&c.$$

egli è patente, che dai logaritmi reali positivi si dee passare mediante il nulla reale agli eguali logaritmi negativi, essendo il nulla medio aritmetico fra 1 e -1, fra 2 e -2 &c.

XII. Per una pari ragione, essendo pel metodo del dottissimo Eulero log. 1 =

$$\&c.\ -4p\sqrt{-1},\ -2p\sqrt{-1},\ +0.p\sqrt{-1},\ +2p\sqrt{-1},\ +4p\sqrt{-1}\ \&c.$$

il $0.p\sqrt{-1}$, ch'è medio aritmetico fra $-2p\sqrt{-1}$, e $+2p\sqrt{-1}$, fra $-4p\sqrt{-1}$, e $+4p\sqrt{-1}$ &c. tutto quantità immaginaria, ha da essere necessariamente immaginario. Il tanto celebre argomento dunque contro i logaritmi reali dei numeri negativi perde tutta la forza; deducendosi evidentemente dai miei raziocinj, che il metodo del lodato Autore determina tutti immaginarj i logaritmi, e dai numeri positivi, e dai numeri negativi. E siccome ciò non esclude,

che

che ai numeri positivi competono dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano; che la quadratura dell'iperbola fra gli assintoti, e la formola esponenziale della logistica $f\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ = si dimostrano uguali a quelli dei numeri positivi.

XIII. Conchiudo con una importante osservazione. Alla serie geometrica delle unità negative sottoponga la serie aritmetica dei logaritmi, che ha loro assegnati l'Eulero:

&c. -1, $-(1)$, -1, $-(1)$, -1, $-(1)$, -1, $-(1)$, -1 &c.

&c. $-5p\sqrt{-1}$, $-(4p\sqrt{-1})$, $-3p\sqrt{-1}$, $-(2p\sqrt{-1})$, $-p\sqrt{-1}$, $(0p\sqrt{-1})$, $+p\sqrt{-1}$, $+(2p\sqrt{-1})$, $+3p\sqrt{-1}$ &c.

Fra due unità negative vicine io colloco una media geometrica anch'essa $= -1$, ed acciocché si distinguano queste medie, le chiudo fra due parentesi. Per la natura della logistica il medio aritmetico fra due logaritmi si eguaglia al logaritmo del medio geometrico fra i due numeri corrispondenti; dunque log. -1 $= -4p\sqrt{-1}$, $-2p\sqrt{-1}$, $0\sqrt{-1}$, $+2p\sqrt{-1}$, $+4p\sqrt{-1}$, &c., che sono quegli stessi logaritmi, che il profondissimo Autore ha scoperto competere all'unità positiva.

XIV. Similmente sotto la progressione geometrica delle unità positive io scrivo i logaritmi, che l'Eulero ha giudicato a loro appartenere

&c. 1, (1), 1, (1), 1, (1), 1, (1), 1 &c.

&c. $-4p\sqrt{-1}$, $-(3p\sqrt{-1})$, $-2p\sqrt{-1}$, $-(p\sqrt{-1})$, $0 \cdot p\sqrt{-1}$, $+(p\sqrt{-1})$, $+2p\sqrt{-1}$, $+(3p\sqrt{-1})$, $+4p\sqrt{-1}$ &c.

e tra due unità vicine metto la media geometrica $= 1$, e fra i corrispondenti logaritmi la media aritmetica. Ed affinché tali medie si possano agevolmente discernere, le serro fra due parentesi.

Si

Si osservi, che in questo incontro altresì la proprietà essenziale della logaritmica ricerca, che convengano a +1 quei logaritmi $-3p\sqrt{-1}$, $-p\sqrt{-1}$, $+p\sqrt{-1}$, $+3p\sqrt{-1}$ ecc., che il Eulero ha stimato soltanto proprj di -1.

XV. Si inferisca pertanto, che ai numeri positivi, e negativi gli stessi logaritmi e immaginarj, e reali si adattano, la qual seconda proposizione si dimostra, come ho detto di sopra, col mezzo della quadratura dell'iperbola fra gli assintoti, e della formola esponenziale della logistica.

Lettere due
al P. D. Giovenale Sacchi &c.
sopra i duetti
dell' Handel, e del Bononcini
nel Tomo XXXVI. pag. 172 del
Giornale di Modena
1787